

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 gennaio 1914.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui problemi di rotolamento di superficie applicabili.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. Nel movimento a due parametri che assume una superficie S_0 quando si fa rotolare ⁽¹⁾ sopra una superficie applicabile S , un punto O , rigidamente connesso alla superficie rotolante S_0 , descrive una superficie Σ ; e similmente un piano π , trascinato rigidamente da S_0 , involuppa una superficie Σ (non sviluppabile). Per abbreviare, chiameremo Σ *superficie* od *inviluppo di rotolamento*; S si dirà la superficie *d'appoggio*, S_0 la *rotolante*, mentre il punto O , od il piano π , che accompagnano S_0 nel rotolamento, prenderanno il nome di punto o piano *satellite*.

Una prima e fondamentale questione che si presenta in questa teoria del rotolamento di superficie applicabili, è la seguente: La superficie, o l'inviluppo, Σ di rotolamento, possono darsi ad arbitrio? E come si trovano, data Σ , le corrispondenti coppie di superficie applicabili (S, S_0)?

Separando i due casi, enunciamo i due problemi, in certo modo duali l'uno dell'altro, in questi termini più precisi:

1°. Problema A). — *Data una qualunque superficie Σ , trovare tutte le coppie (S, S_0) di superficie applicabili, tali che, rotolando S_0*

⁽¹⁾ Pel senso preciso del termine *rotolamento*, vedi Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, IV^{ème} Partie Chap. VI; od anche le mie *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, pag. 34.

sopra S , un conveniente punto O , satellite di S_0 , descriva la superficie Σ .

2°. Problema B). — Data una superficie Σ non sviluppabile, trovare tutte le coppie (S, S_0) di superficie applicabili, tali che, rotolando S_0 sopra S , un conveniente piano π , satellite di S_0 , involuppi la superficie Σ .

Ciascuno dei due problemi ammette sempre, come si vedrà, una infinità di soluzioni con due funzioni arbitrarie, e la ricerca delle infinite coppie (S, S_0) corrispondenti di superficie applicabili dipende dalla integrazione di un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, lineare nelle derivate seconde e quadratica nelle derivate prime. Le coppie (S, S_0) corrispondono biunivocamente alle soluzioni di questa equazione del 2° ordine.

2. Fra i punti μ della superficie Σ (o involuppo) di rotolamento ed i punti M della superficie S d'appoggio viene stabilita, per la generazione geometrica stessa, una corrispondenza, essendo M il punto generico di contatto della S colla rotolante S_0 , e μ la posizione occupata sopra Σ dal punto satellite (ovvero il punto di contatto col piano satellite). Il punto μ è il piede della perpendicolare abbassata da M sopra Σ .

Ora supponiamo che la superficie S , flessibile ed inestendibile, si deformi, seco trasportando, invariabilmente legati, i segmenti rettilinei $M\mu$, ed assuma la configurazione S_0 della superficie rotolante. Nel caso del problema A), i termini μ di questi segmenti dovranno raccogliersi in un unico punto O (nel punto satellite), ed invece, pel problema B), si distribuiranno sul piano satellite π , normale ai segmenti $M\mu$ nella loro nuova posizione. Viceversa, se esiste una configurazione S_0 della S , per la quale gli estremi μ dei segmenti $M\mu$ si raccolgono in un punto O , ovvero si distribuiscono sopra un piano π , la coppia (S, S_0) di superficie applicabili darà, nel primo caso, una soluzione del problema A) con O punto satellite, nel secondo una soluzione del problema B) con π piano satellite.

In seguito a ciò, diventa di fondamentale importanza, pei nostri problemi di rotolamento, il risolvere la questione seguente, che si collega al noto teorema di Beltrami sulla deformazione delle congruenze normali (1): Una superficie S flessibile ed inestendibile si deforma, seco trasportando i segmenti rettilinei $M\mu$, uscenti dai punti M di S e terminati negli estremi μ ad una superficie Σ normale ai segmenti stessi.

Quando è che esiste una configurazione S_0 della S , per la quale la superficie Σ si contrae in un punto? ovvero una configurazione S_0 per la quale Σ diventa un piano?

Se chiamiamo R il valore (algebrico) del segmento $M\mu$, sarà R una funzione delle coordinate curvilinee u, v del punto M mobile su S . Nel

(1) Vedi le mie *Lezioni*, vol. I, pag. 311.

primo caso, R dovrà rappresentare la distanza del punto M_0 corrispondente, sulla supposta superficie applicabile S_0 , dal punto fisso O ; nel secondo, sarà R la distanza di M_0 dal piano fisso π .

Inversamente, supponiamo che esista una superficie S_0 , applicabile sopra S , e tale che $R = \mu u$ rappresenti la distanza di M_0 (corrispondente ad M) da un punto fisso O nello spazio, ovvero la distanza da un piano fisso π . Dico, allora, che: *Quando la S , deformandosi, assume la configurazione S_0 , i termini μ dei segmenti μu si raccolgono, nel primo caso, nel punto O , e nel secondo si distribuiscono sul piano π .*

La dimostrazione risulta da una nota proprietà che compete agli involuppi di una doppia infinità di sfere, comunque si deformi la superficie luogo dei centri, e cioè che: *sopra ciascuna sfera i due punti di contatto coll'involuppo serbano una posizione invariabile* ⁽¹⁾.

3. Le considerazioni geometriche sopra esposte hanno trasformato i problemi A) e B) nella questione seguente:

Le normali alla superficie data Σ si intercettino con una superficie S , e si indichi con R il segmento (variabile) di normale compreso fra Σ ed S . Come deve prendersi R affinchè esista una superficie S_0 applicabile sopra S , per la quale R rappresenti la distanza di un punto variabile sopra S_0 da un punto fisso nel caso A), ovvero da un piano fisso nel caso B)?

Si riferisca, per maggior semplicità, la superficie Σ di rotolamento alle sue linee di curvatura (u, v) , e siano E, G i coefficienti del quadrato del suo elemento lineare

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2,$$

ed $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}$ le sue curvature principali, talchè:

$$E, G; \frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}$$

saranno funzioni note di u, v . Se riportiamo sopra la normale a Σ un segmento variabile

$$R = R(u, v),$$

la superficie S , luogo degli estremi di questi segmenti, avrà un elemento lineare ds_1 che si calcola subito colla formola:

$$(1) \quad ds_1^2 = E \left(1 + \frac{R}{r_1} \right)^2 du^2 + G \left(1 + \frac{R}{r_2} \right)^2 dv^2 + dR^2.$$

a) Ora suppongasi dapprima che esista una superficie S_0 applicabile sopra S , per la quale R rappresenti la distanza del punto (u, v) di S_0 da

⁽¹⁾ *Lezioni*, vol. II, pag. 88.

un punto O fisso nello spazio. Se riferiamo la S_0 ad un sistema di coordinate polari (R, θ, φ) col centro in O, delle quali R sia il raggio vettore e θ, φ gli angoli polari, per l'elemento lineare ds_0 della superficie S_0 avremo:

$$(2) \quad ds_0^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + dR^2.$$

Per esprimere che S, S_0 sono isometriche, dobbiamo eguagliare le due forme differenziali (1), (2), onde segue

$$(2^*) \quad E \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r_2} \right)^2 du^2 + G \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r_1} \right)^2 dv^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

A destra abbiamo il quadrato dell'elemento lineare della sfera unitaria: e, per ciò, R dovrà essere una tale funzione di u, v da rendere la forma differenziale a sinistra di curvatura $K = +1$. Viceversa, se questo accade, avremo una soluzione del problema A), e la superficie rotolante S_0 si avrà integrando l'equazione differenziale di Riccati che occorre per ridurre la forma (2^*) a sinistra al tipo normale $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$. Concludiamo adunque:

Per risolvere il problema A), si riporti sopra ogni normale della superficie data Σ un segmento $R = R(u, v)$, tale da rendere la forma quadratica differenziale

$$(3) \quad E \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r_2} \right)^2 du^2 + G \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r_1} \right)^2 dv^2 \quad (1).$$

di curvatura $= +1$. Il luogo dei termini di questi segmenti dà una superficie [S d'appoggio, e la superficie S_0 rotolante (insieme col punto satellite) viene individuata dalla (2) o (2^) , mediante l'integrazione di un'equazione di Riccati.*

Dopo ciò, noi formiamo subito, nel modo più semplice, l'equazione a derivate parziali del 2° ordine da cui dipende il problema A), procedendo come segue. Pongasi

$$\frac{1}{R} = T$$

$$H_1 = \sqrt{E} \cdot T + \frac{\sqrt{E}}{r_2}, \quad H_2 = \sqrt{G} \cdot T + \frac{\sqrt{G}}{r_1},$$

(1) Si trasforma subito questo risultato in coordinate curvilinee qualunque. Se con

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2$$

si indicano le due forme quadratiche fondamentali di Σ , con H la curvatura media, con K la totale, è da determinarsi R in guisa che la forma differenziale

$$\left(\frac{1}{R^2} - K \right) (E du^2 + 2F du dv + G dv^2) - \left(\frac{2}{R} + H \right) (D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2)$$

abbia la curvatura $= +1$.

e si esprima che la curvatura della (3) è $= +1$, scrivendo la relazione

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} \right) + H_1 H_2 = 0.$$

Tenendo conto delle note formole

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1/\bar{G}}{r_1} \right) &= \frac{1}{r_2} \frac{\partial 1/\bar{G}}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1/\bar{E}}{r_2} \right) = \frac{1}{r_1} \frac{\partial 1/\bar{E}}{\partial v} \\ \frac{1}{r_1 r_2} &= -\frac{1}{1/\bar{E} \bar{G}} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{1/\bar{E}} \frac{\partial 1/\bar{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{1/\bar{G}} \frac{\partial 1/\bar{E}}{\partial v} \right) \right\}, \end{aligned}$$

la precedente si trasforma subito nell'altra:

$$(I) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1/\bar{G}}{H_1} \frac{\partial T}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1/\bar{E}}{H_2} \frac{\partial T}{\partial v} \right) + 1/\bar{E} \bar{G} \left\{ T^2 + T \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \right\} = 0.$$

Questa è, pel problema A), l'equazione annunciata al n. 1, lineare in $\frac{\partial^2 T}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial v^2}$, e di 2° grado in $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$.

b) Passando al caso del problema B), dovrà qui R rappresentare la distanza del punto (u, v) della superficie S_0 dal piano fisso π e se assumiamo questo per piano xy , dovremo quindi avere

$$E \left(1 + \frac{R}{r_2} \right)^2 du^2 + G \left(1 + \frac{R}{r_1} \right)^2 dv^2 + dR^2 = dx^2 + dy^2 + dR^2.$$

In questo caso, adunque, la condizione *necessaria e sufficiente* è che $R = R(u, v)$ renda *nulla* la curvatura della forma differenziale quadratica

$$E \left(1 + \frac{R}{r_2} \right)^2 du^2 + G \left(1 + \frac{R}{r_1} \right)^2 dv^2 \quad (1).$$

Soddisfatta questa condizione, la riduzione di questa alla forma normale $dx^2 + dy^2$ richiede solo *quadrature*.

Volendo ora calcolare l'equazione a derivate parziali per l'attuale problema B), pongasi

$$h_1 = 1/\bar{E} + \frac{1/\bar{E}}{r_2} \cdot R, \quad h_2 = 1/\bar{G} + \frac{1/\bar{G}}{r_1} \cdot R.$$

(1) In coordinate curvilinee qualunque (u, v) , è la forma

$$(1 - R^2 K) (E du^2 + 2F du dv + G dv^2) - (2R + R^2 H) (D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2)$$

che deve avere la curvatura nulla.

e si scriva l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial v} \right) = 0$$

che, calcolata, diviene:

$$(II) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{h_1} \frac{\partial R}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{r_2} \cdot \frac{1}{h_2} \frac{\partial R}{\partial v} \right) = \frac{1}{r_1 r_2} \sqrt{EG}.$$

Ogni soluzione R di questa equazione determina una superficie S d'appoggio per una soluzione del problema B); e la superficie S_0 rotolante, unica e determinata, si trova con quadrature.

Così si è in effetto dimostrato che tanto il problema A), quanto il problema B), ammettono infinite soluzioni. La loro ricerca equivale a porre l'elemento lineare della sfera, ovvero quello del piano, rispettivamente sotto le forme determinate:

$$E \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r_2} \right)^2 du^2 + G \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r_1} \right)^2 dv^2,$$

$$E \left(1 + \frac{R}{r_2} \right)^2 du^2 + G \left(1 + \frac{R}{r_1} \right)^2 dv^2,$$

risultato questo, che presenta una stretta analogia col teorema di Weingarten relativo alle superficie W .

4. Si può facilmente trovare l'integrale generale della prima (I) nel caso che la assegnata superficie Σ di rotolamento sia un piano, ovvero una sfera.

1° caso: Σ un piano. Si può fare, in questo caso,

$$E = G = 1, \quad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} = 0,$$

ed il problema consiste nel ridurre l'elemento lineare della sfera alla forma

$$\frac{du^2 + dv^2}{R^2},$$

che è quanto dire alla forma isoterma.

Basta dunque considerare una qualunque rappresentazione conforme della sfera sul piano Σ , ed elevare in ogni punto di questo piano un segmento rettilineo normale uguale al *modulo* della dilatazione lineare nella detta rappresentazione conforme. Il luogo degli estremi di questi segmenti

è una superficie S d'appoggio, e la superficie rotolante si trova, in questo caso, *in termini finiti*.

2° caso: Σ una sfera. Sia a il raggio di questa sfera, di cui prendiamo l'elemento lineare ds sotto forma isoterma:

$$\lambda (du^2 + dv^2).$$

Il problema consiste qui nel determinare R in guisa che l'elemento lineare

$$ds_1^2 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{a} \right)^2 \cdot \lambda (du^2 + dv^2)$$

appartenga alla sfera unitaria. Si consideri adunque una qualunque rappresentazione conforme della sfera Σ sulla sfera unitaria; e sulle normali a Σ si riportino i segmenti R dati da

$$R = \frac{a\mu}{a - \mu},$$

indicando con μ il modulo della dilatazione lineare. Il luogo degli estremi di questi segmenti R dà una superficie S d'appoggio, e la rotolante S_0 si ottiene ancora in termini finiti.

Del resto, la risoluzione del problema A) in questi due casi è già nota implicitamente fin dal 1900 per le ricerche del prof. Calò ⁽¹⁾, il quale ha dato formule eleganti che forniscono insieme la superficie S d'appoggio e quella S_0 rotolante.

Un caso analogo ai precedenti si ha pel problema B) quando l'involuppo Σ di rotolamento debba essere una sfera; ma questo non differisce in sostanza dal primo dei casi sopra considerati, se non per lo scambio fra la superficie d'appoggio e la superficie rotolante.

5. Se nei casi considerati al n. precedente (ed in nuovi, di cui trattiamo fra breve) l'integrazione della (I) e della (II) riesce completamente, in altri potremo conoscerne delle soluzioni particolari.

Così, p. es., suppongasì che la superficie di rotolamento Σ (o l'involuppo) sia una superficie elicoidale, o, più in particolare, una superficie di rotazione. In tal caso potremo assumere, nelle nostre formole, E, G, r_1, r_2 funzioni di una combinazione lineare

$$x = au + bv$$

delle variabili, a coefficienti a, b costanti. Allora le equazioni (I) o (II)

⁽¹⁾ Risoluzione di alcuni problemi sull'applicabilità, in Annali di matematica, serie 3^a, tom. IV.

ammettono una doppia infinità di soluzioni particolari T o R funzioni dell'argomento stesso τ , poichè esse si cangiano, in questa ipotesi, in una equazione differenziale ordinaria del 2° ordine. E siccome R è allora costante lungo le eliche $au + bv = \text{cost.}$ (o i paralleli), si vede che la superficie S d'appoggio sarà pure elicoidale, e lo stesso si riscontra aver luogo per la superficie S_0 rotolante. Dunque: *Se la superficie Σ di rotolamento (o l'involuppo) è elicoidale, esiste una doppia infinità di coppie (S, S_0) di elicoidi applicabili, che risolvono il problema A), o il problema B).*

Si consideri ancora il caso che la superficie Σ di rotolamento sia un cilindro circolare retto, di raggio $= \frac{1}{a}$. Possiamo fare

$$E = G = 1, \quad \frac{1}{r_1} = 0, \quad \frac{1}{r_2} = a;$$

e il problema si trasforma, pel n. 3, nell'altro di ridurre l'elemento lineare sferico alla forma (di Weingarten)

$$(T + a)^2 du^2 + T^2 dv^2.$$

Esso equivale quindi alla ricerca di tutte le deformate di una certa superficie di rotazione, che si può facilmente assegnare.

6. Nelle ricerche che abbiamo fin qui indicato, si è tacitamente escluso il caso che il rotolamento di S_0 sopra S dia luogo ad un movimento *con un solo parametro*, anzichè ad un movimento a due parametri. Questa circostanza si presenta allora, ed allora soltanto, che la coppia (S, S_0) consti di due rigate applicabili (R, R_0), sicchè, corrispondendosi nell'applicabilità le generatrici (pel teorema di Bonnet), la rigata rotolante R_0 tocca in ogni sua posizione la rigata R d'appoggio *lungo tutta una generatrice* e, rotolando, acquista solo una semplice infinità di posizioni. In tal caso un punto O satellite di R_0 descrive non più una superficie, *ma una curva C*, ed un piano π satellite di R_0 involuppa una *svilupppabile*; e i problemi fondamentali A) e B) si semplificano nei due seguenti:

Problema A'). — *Data una curva qualunque C come curva di rotolamento ("roulette"), trovare tutte le coppie (R, R_0) di rigate applicabili tali che, rotolando R_0 sopra R, un punto O, satellite di R_0 , descriva la curva C.*

Problema B'). — *Data una qualunque svilupppabile Σ , trovare tutte le coppie (R, R_0) di rigate applicabili, tali che, rotolando R_0 sopra R, un piano π , satellite di R_0 , involuppi Σ .*

Questi due problemi sono retti ancora dalle medesime equazioni a derivate parziali (I) (II), convenientemente interpretate; ed in questi casi, come in quelli considerati al n. 4, l'integrazione riesce completamente. In ciò che segue, diamo le relative costruzioni geometriche, le quali si possono rendere

intuitive mediante considerazioni infinitesimali affatto analoghe a quelle usate dal Beltrami nella sua Memoria sulla flessione delle superficie rigate ⁽¹⁾.

7. Per risolvere il problema A'), si scelga sopra ogni piano normale alla curva C di rotolamento una retta r ad arbitrio (con legge continua). Il luogo di queste ∞^1 rette ci dà una rigata R d'appoggio, che determina, in modo unico, la rigata R_0 rotolante. Possiamo esprimere il risultato anche così: *Il problema A') ammette infinite soluzioni (con due funzioni arbitrarie), che si ottengono scegliendo ad arbitrio la rigata R d'appoggio entro il complesso delle tangenti alla sviluppabile polare della curva C di rotolamento.*

È poi manifesto che fra queste infinite coppie (R, R_0) di rigate applicabili vi sono ancora infinite coppie di sviluppabili. Come spigolo di regresso Γ della sviluppabile R d'appoggio si può prendere una qualunque curva tracciata sulla sviluppabile polare di C ; lo spigolo di regresso Γ_0 della sviluppabile rotolante ne resta allora determinato (mediante le sue equazioni intrinseche). In tal caso, invece che del rotolamento delle due sviluppabili, si può parlare del rotolamento della curva Γ_0 sulla curva Γ ; il che deve intendersi nel senso seguente: Le due curve Γ, Γ_0 si corrispondono per eguaglianza d'archi e di flessione nei punti corrispondenti, ed il rotolamento di Γ_0 su Γ avviene in guisa che in ogni sua posizione Γ_0 tocca Γ nel punto corrispondente, ed ha ivi a comune con Γ il piano osculatore; il punto O , invariabilmente legato a Γ_0 , descrive la curva data C .

Passando al secondo problema B'), lo risolviamo analogamente come segue: Si considerino i piani condotti per ciascuna generatrice della sviluppabile Σ assegnata normalmente alla sviluppabile stessa (piani rettificanti del suo spigolo di regresso), ed in ciascuno di questi piani si scelga ad arbitrio una retta r . Il luogo delle rette r è una rigata R d'appoggio in una soluzione del problema B'); la rigata rotolante R_0 ne resta individuata, insieme col piano satellite.

Si osservi che anche qui come soluzioni avremo infinite coppie di sviluppabili, ossia di curve rotolanti Γ, Γ_0 , delle quali la curva Γ d'appoggio può scegliersi ad arbitrio fra le curve tracciate sulla sviluppabile rettificante dello spigolo di regresso di Σ .

8. Consideriamo da ultimo il caso di due rigate (R, R_0) applicabili, di cui la rotolante R_0 trascini seco rigidamente una retta r (retta satellite), la quale dunque descriverà una terza rigata di rotolamento R' . Proponiamoci il nuovo problema:

Problema C'). — *Data una qualunque rigata R' , trovare tutte le coppie (R, R_0) di rigate applicabili, tali che, rotolando R_0 sopra R , una retta r , satellite di R_0 , descriva la rigata prescritta R' .*

⁽¹⁾ Beltrami, Opere, vol. I, pag. 226.

Anche questo problema ammette infinite soluzioni, le quali però ora dipendono da una sola funzione arbitraria, e si ottengono nel modo seguente: Si consideri una generatrice g' variabile sopra R' ed il *paraboloide delle normali* lungo g' , e su questo paraboloide si segni ad arbitrio una generatrice g del sistema di g' . Il luogo di queste ∞^1 rette g , scelte con continuità, ci dà una superficie rigata R d'appoggio in una soluzione del problema C' ; e la rigata R_0 rotolante, insieme con la retta satellite, ne resta individuata. Le generatrici dei paraboloidi delle normali appartenenti al sistema delle g' formano una congruenza, entro la quale può essere scelta ad arbitrio la rigata R d'appoggio.

In fine si osservi che, nel caso attuale, fra le coppie (R, R_0) di rigate applicabili che risolvono il problema C' , abbiamo una *semplice infinità* di sviluppabili, quella R d'appoggio potendosi scegliere ad arbitrio fra le sviluppabili della congruenza.

Fisica-matematica. — *Deduzione rigorosa di una relazione fondamentale nella teoria del calore raggianti.* Nota del Socio T. LEVI-CIVITA.

Alludo alla relazione

$$(I) \quad \varepsilon = K\alpha,$$

valida in ogni punto M di un generico mezzo isotropo in equilibrio di irraggiamento: ε vi rappresenta il coefficiente di emissione in M (riferito all'unità di volume irraggiante, talchè $4\pi\varepsilon$ è la quantità di energia irraggiata tutt'intorno nell'unità di tempo); α il coefficiente di assorbimento, pure in M (per unità di lunghezza); K l'intensità specifica, e quindi πK il potere emissivo (riferito all'unità di superficie) spettante ad uno qualunque degli ∞^2 elementi superficiali uscenti da M . Si intende che ε, α, K vanno presi tutti e tre per radiazioni di una stessa frequenza; ovvero tutti e tre per l'intero spettro; più generalmente, del resto, va ritenuto che ci atteniamo al Planck ⁽¹⁾ per definizioni e postulati ⁽²⁾.

Il procedimento ⁽³⁾, attraente per geometrica semplicità, di cui si è valso l'illustre Autore per stabilire la (I), si appoggia sopra un'ipotesi addizionale, intuitivamente plausibile, ma concettualmente complessa ed esuberante. Ecco di che si tratta. Si fissa in primo luogo un generico elemento di volume S circostante a M , e una superficie sferica Σ col centro in S ,

(1) *Theorie der Wärmestrahlung*, cap. I [(2^a ediz.), Leipzig, Barth, 1913].

(2) Il Planck considera soltanto mezzi omogenei. Anche la nostra deduzione della (I) sarà svolta in questa ipotesi. Ma ciò non lede la generalità, perchè l'estensione a mezzi eterogenei (isotropi) apparisce poi ovvia. Cfr. il n. 8 del presente scritto.

(3) Op. cit., §§ 24-26.

di raggio abbastanza grande perchè, rispetto ad esso, si possano trattare come infinitesime le dimensioni di S . Si valuta poi l'energia assorbita da S nell'unità di tempo, riguardandola irraggiata da Σ , ed ammettendo inoltre che essa giunga in S senza attenuazione, nè rinforzo. Ciò si giustifica in base all'ipotesi addizionale suaccennata, che può enunciarsi così: in condizioni di equilibrio termodinamico, ogni pennello elementare di raggi, nel passaggio da Σ ad S , tanto perde per assorbimento (ed eventuale dispersione) quanto acquista per emissione (e dispersione). Debbo tale schiarimento alla personale cortesia del prof. Planck e gliene attesto il mio grato animo, venendo ormai allo scopo della presente Nota. Esso è di ricavare la relazione (I) ⁽¹⁾, mediante una dimostrazione *matematica* ⁽²⁾ che eviti la ipotesi speciale di Planck, sfruttando unicamente (accanto alle premesse generali) la stazionarietà dell'irraggiamento globale di una (qualsiasi) porzione S del mezzo. Vi si perviene nel modo più naturale, esprimendo, a mezzo degli integrali, che direttamente traducono i postulati fisici, la eguaglianza fra l'energia emessa e quella assorbita da S nell'unità di tempo. La (I) ne discende per materiale trasformazione di integrali.

Di questa trasformazione mi occuperò in primo luogo (nn. 1-5), stabilendo anzi una formula alquanto più generale, che mi sembra specifica per la teoria matematica dell'irraggiamento.

1. — NOTAZIONI.

Sia S un campo a tre dimensioni, σ il relativo contorno. Rappresentino: P e P' due punti qualsivogliano di S , o, in particolare, di σ ; x, y, z e x', y', z' le rispettive coordinate; $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ la distanza $\overline{PP'}$; dS e dS' due elementi di campo contenenti P o, rispettivamente, P' . Qualora in particolare P o P' cadano sul contorno, designeranno: $d\sigma, d\sigma'$ due elementi di superficie ad essi circostanti; n, n' le rela-

⁽¹⁾ A dir vero, l'intervento di K non è indispensabile per arrivare alla legge di Kirchhoff. Ciò risulta dalle belle ricerche di Hilbert [Cfr. *Begründung der elementaren Strahlungstheorie*, Nachr. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1912, Heft 7]. Ma non compare per questo l'importanza fisica della nozione di potere emissivo, è l'interesse di fissarne l'espressione in termini di s e di α .

⁽²⁾ Tale non può ritenersi la considerazione che si legge nell'articolo del Wien, *Theorie der Strahlung* [Enc. der Math. Wiss., V, 3, 2, pag. 288]. Essa contempla infatti un semispazio indefinito. E, per passare alla (I), nella sua accezione generale, bisogna ancora ammettere che, in un punto qualunque di un mezzo isotropo in equilibrio di irraggiamento, le cose vanno come nel caso tipico di un semispazio limitato da un piano indefinito. Ora ciò non mi sembra, nemmeno fisicamente, evidente, dato che il risultato relativo al caso tipico non scende da comportamento locale, ma è desunto per essenziale contributo di tutto il semispazio.

tive normali vòlte verso l'interno del campo; (α, β, γ) , $(\alpha', \beta', \gamma')$ i loro coseni direttori; \widehat{nr} l'angolo in P, formato da n con r , o, più precisamente, col vettore $P' - P$ (che va da P a P'); $\widehat{n'r}$ l'angolo in P' di n' con $P - P'$.

Sarà manifestamente (il simbolo Σ rappresentando la somma dei termini che si ottengono da quello scritto per sostituzione circolare delle terne

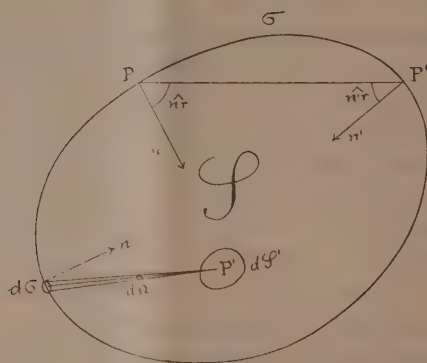


FIG. 1.

di lettere x, y, z ; x', y', z' ; α, β, γ ; α', β', γ')

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dr}{dn} &= \Sigma \frac{\partial r}{\partial x} \alpha = \Sigma \frac{x - x'}{r} \alpha = -\cos \widehat{nr}, \\ \frac{dr}{dn'} &= \Sigma \frac{\partial r}{\partial x'} \alpha' = \Sigma \frac{x' - x}{r} \alpha' = -\cos \widehat{n'r}. \end{aligned} \right.$$

2. — UNA TRASFORMAZIONE DI INTEGRALI.

Si consideri un integrale (quadruplo) del tipo

$$(2) \quad I = \int_{\sigma} d\sigma \int_{\sigma'} d\sigma' \cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r} \cdot r \frac{d\varphi}{dr},$$

in cui φ designa una funzione del solo argomento r , uniformè e continua insieme con le due prime derivate.

In virtù delle (1), la funzione integranda può essere scritta

$$\frac{d\varphi}{dn} \Sigma (x' - x) \alpha',$$

talchè, posto, per brevità,

$$J = \int_{\sigma} d\sigma' \Sigma (x' - x) \frac{d\varphi}{dn} \alpha',$$

la (2) equivale a

$$(2') \quad I = \int_{\sigma} J d\sigma.$$

L'integrale J , colla ordinaria formula di Green, si trasforma in

$$- \int_{\mathbf{s}} dS' \Sigma \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ (x' - x) \frac{d\varphi}{dn} \right\}.$$

Eseguendo la derivazione e badando all'indipendenza dei due operatori

$$\frac{\partial}{\partial x'} \text{ e } \frac{d}{dn} = \Sigma \alpha \frac{\partial}{\partial x}, \text{ si ha}$$

$$J = - 3 \int_{\mathbf{s}} \frac{d\varphi}{dn} dS' - \int_{\mathbf{s}} dS' \Sigma (x' - x) \frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x'}.$$

Notiamo ora che, per essere

$$\frac{d}{dn} (x' - x) = -\alpha,$$

sussiste l'identità

$$\Sigma (x' - x) \frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{d}{dn} \Sigma (x' - x) \frac{\partial \varphi}{\partial x'} + \Sigma \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x'},$$

e teniamo d'altra parte presente che, dipendendo φ dalle coordinate esclusivamente pel tramite di r , si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial r}{\partial x'} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{x' - x}{r},$$

nonchè

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Con ciò, l'identità diviene

$$\Sigma (x' - x) \frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{d}{dn} \Sigma \frac{(x' - x)^2}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \Sigma \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d}{dn} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) - \frac{d\varphi}{dn};$$

e, sostituendo nella precedente espressione di J , si ricava

$$J = - \int_{\mathbf{s}} dS' \frac{d}{dn} \left(2\varphi + r \frac{d\varphi}{dr} \right).$$

La (2') porge infine, invertendo le integrazioni,

$$(2'') \quad I = - \int_{\mathbf{s}} dS' \int_{\sigma} d\sigma \frac{d}{dn} \left(2\varphi + r \frac{d\varphi}{dr} \right).$$

La formula di trasformazione, che volevamo stabilire, risulta dall'eguagliare i secondi membri di (2) e (2''). Essa è quindi:

$$(3) \quad \int_{\sigma} d\sigma \int_{\sigma} d\sigma' \cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r} \cdot r \frac{d\varphi}{dr} = - \int_{\mathfrak{s}} dS' \int_{\sigma} d\sigma \frac{d}{dn} \left(2\varphi + r \frac{d\varphi}{dr} \right).$$

3. — COROLLARI.

Nel primo membro della (3) la funzione integranda dipende, in modo simmetrico, da due punti P e P' del contorno. Si può facilmente attribuire anche al secondo membro una forma simmetrica, rispetto alle coppie P, P' del campo. Basta applicare all'integrale esteso a σ la formula classica di Green che lo trasforma in integrale di spazio. E si ha (invertendo ancora le integrazioni, per uniformità col primo membro):

$$(4) \quad \int_{\sigma} d\sigma \int_{\sigma} d\sigma' \cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r} \cdot r \frac{d\varphi}{dr} = \int_{\mathfrak{s}} dS \int_{\mathfrak{s}} dS' \mathcal{A}_2 \left(2\varphi + r \frac{d\varphi}{dr} \right),$$

dove \mathcal{A}_2 designa l'operatore di Laplace rispetto alle coordinate x, y, z del punto P. Si avverta, però, che, trattandosi di una funzione del solo argomento r , l'operatore \mathcal{A}_2 si riduce notoriamente a

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right).$$

Per lo scopo che abbiamo in vista, giova riprendere la (3) e presentarla sotto aspetto lievemente modificato, ponendo

$$r \frac{d\varphi}{dr} = f,$$

ed eseguendo, nel secondo membro, la derivazione rispetto ad n .

Dacchè, per una funzione della sola r , è

$$\frac{d}{dn} = \frac{dr}{dn} \frac{d}{dr} = - \cos \widehat{nr} \frac{d}{dr},$$

si ha

$$- \frac{d}{dn} \left(2\varphi + r \frac{d\varphi}{dr} \right) = \cos \widehat{nr} \left\{ 2 \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) \right\},$$

ossia, sostituendo f a φ ,

$$- \frac{d}{dn} \left(2\varphi + r \frac{d\varphi}{dr} \right) = \cos \widehat{nr} \left(\frac{2}{r} f + \frac{df}{dr} \right).$$

La (3) equivale pertanto a

$$(5) \quad \int_{\sigma} d\sigma \int_{\sigma} d\sigma' \cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r} \cdot f(r) = \int_{\mathfrak{s}} dS' \int_{\sigma} d\sigma \cos \widehat{nr} \cdot \left(\frac{2}{r} f + \frac{df}{dr} \right),$$

dove f può ritenersi funzione arbitraria di r , continua insieme con la sua derivata prima: ciò in virtù di $f = r \frac{d\varphi}{dr}$, e delle ipotesi fatte su φ [n. 2].

Veramente, con tali ipotesi, la $f = r \frac{d\varphi}{dr}$ imporrebbe ulteriormente a f la condizione di annullarsi (di prim'ordine almeno) per $r = 0$. Ma si vede subito che ciò è inessenziale, appoggiandosi sulla seguente:

4. — OSSERVAZIONE.

La formula (3) seguita a sussistere, anche se φ diviene infinita d'ordine non superiore al primo, per $r = 0$. Rimane infatti legittimo tutto ciò che si è detto, quando φ si intendeva finita.

Segue quindi a sussistere anche la (5), con una f , sia semplicemente finita per $r = 0$ (il che corrisponde ad un infinito logaritmico della φ), sia infinita di prim'ordine (il che corrisponde ad analoga singolarità di φ).

Quanto alla (4), se l'ordine di infinito di φ , per $r = 0$, è inferiore ad 1, essa è ancora legittima. Ma se φ diviene infinita di prim'ordine, la trasformazione di

$$\int_{\sigma} d\sigma \frac{d}{dn} \left(2\varphi + r \frac{d\varphi}{dr} \right)$$

in integrale di volume richiede che si consideri a parte il termine polare $\frac{C}{r}$ (C costante). Ciò reca in definitiva al secondo membro della (4) un termine addizionale $4\pi CS$ (S volume del campo designato colla stessa lettera).

5. — CASI PARTICOLARI NOTEVOLI.

Per quanto abbiamo ora osservato, si può prendere, nella (3), $\varphi = -\frac{1}{r}$.

Il primo membro, allora, è

$$\int_{\sigma} d\sigma \int_{\sigma'} d\sigma' \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r'}}{r},$$

e il secondo

$$\int_{\sigma} dS' \int_{\sigma} d\sigma \frac{d}{dn} \frac{1}{r}.$$

Dacchè r vi rappresenta la distanza fra un punto P di σ' e un generico punto P' interno alla superficie, l'integrale

$$\int_{\sigma} d\sigma \frac{d}{dn} \frac{1}{r}$$

vale 4π . Si ricava, pertanto,

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} d\sigma \int_{\sigma} d\sigma' \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r}$$

come espressione del volume limitato da una generica superficie chiusa σ .
Pongasi, nella (5),

$$f = \frac{1 - e^{-\alpha r}}{r^2}$$

con α costante. Ciò è ancora legittimo, dacehè f ha un infinito di primo ordine per $r=0$, rimanendo, del resto, ovunque regolare.

Avremo l'identità

$$(6) \quad \int_{\sigma} d\sigma \int_{\sigma} d\sigma' \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r^2} (1 - e^{-\alpha r}) = \alpha \int_{\sigma} dS' \int_{\sigma} d\sigma \frac{\cos \widehat{nr}}{r^2} e^{-\alpha r},$$

che tra un momento ci renderà segnalato servizio.

6. — APPLICAZIONE AL REGIME STAZIONARIO DEL CALORE RAGGIANTE IN UN MEZZO OMOGENEO ISOTROPO.

Sia S una porzione di tale mezzo, limitata da un contorno *convesso* σ ; ε il coefficiente di emissione, che sarà da ritenersi costante, trattandosi di mezzo omogeneo in regime stazionario.

Riportandoci, per le notazioni, al n. 1, fissiamo un qualsiasi punto P' di S e un circostante elemento dS' [cfr. la fig. 1]. Sia poi $d\Omega$ l'ampiezza (angolo solido misurato sulla sfera di raggio 1) di un generico cono elementare spiccato da P' ; $d\sigma$ l'elemento del contorno σ (unico, dacehè il contorno si suppone convesso) segato da detto cono elementare. Manifestamente,

$$d\Omega = d\sigma \frac{\cos \widehat{nr}}{r^2};$$

e la quantità di energia, inviata nell'unità di tempo da dS' , entro il cono elementare $d\Omega$, vale

$$\varepsilon dS' d\Omega.$$

Questa energia esce dal campo attraverso $d\sigma$: ma non integralmente, in causa dell'assorbimento. Se α è il relativo coefficiente per unità di lunghezza, dato che il cammino percorso è rappresentato da r , $e^{-\alpha r}$ sarà la frazione di $\varepsilon dS' d\Omega$ che va fuori del campo.

Di tutta l'energia emanata da dS' secondo le varie direzioni (nell'unità di tempo), ne esce da S (pure nell'unità di tempo)

$$\varepsilon dS' \int_{\text{esteso alla sup. sferica di raggio 1}} e^{-\alpha r} d\Omega = \varepsilon dS' \int_{\sigma} d\sigma \frac{\cos \widehat{nr}}{r^2} e^{-\alpha r}.$$

In totale, sommando cioè i contributi di tutti i dS' , la perdita di energia, subita da S nell'unità di tempo, ammonterà a

$$(7) \quad E = \epsilon \int_S dS' \int_{\sigma} d\sigma \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r^2} e^{-ar}.$$

In condizioni di regime (equilibrio termodinamico), a questa perdita deve far riscontro un'eguale somministrazione dall'esterno, per flusso attraverso gli elementi di contorno.

Se K rappresenta l'intensità specifica, ogni $d\sigma$ irradia verso $d\sigma'$, nell'unità di tempo, la quantità di energia

$$K d\sigma d\sigma' \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r^2} \quad (1).$$

Di questa, però, soltanto la frazione $1 - e^{-ar}$ rimane entro il campo.

Complessivamente, per effetto dei mutui scambi, si ha come espressione — da eguagliarsi ad E — dell'acquisto di energia:

$$(8) \quad E = K \int_{\sigma} d\sigma \int_{\sigma'} d\sigma' \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r^2} (1 - e^{-ar}).$$

In virtù della (6), si può invece scrivere

$$(8') \quad E = K\alpha \int_S dS' \int_{\sigma} d\sigma \frac{\cos \widehat{nr}}{r^2} e^{-ar},$$

e il materiale confronto di (7) e (8') porge

$$(I) \quad \epsilon = K\alpha,$$

c. d. d.

7. — VALIDITÀ DELLE FORMULE (7) ED (8) ANCHE PER CAMPI NON CONVESSI.

Le espressioni (7) ed (8) dell'energia sottratta, o rispettivamente comunicata ad S, nell'unità di tempo, sono state dedotte nell'ipotesi che il campo sia limitato da un contorno convesso. Tale limitazione è però inessenziale. Per rendersene conto, basta seguire passo passo il procedimento del n°. precedente, tenendo debito conto delle modificazioni richieste dalla maggiore generalità del contorno.

Riferiamoci, per fissare le idee, al calcolo dell'energia sottratta, cominciando coll'osservare che un cono elementare di vertice P' può incontrare

(1) Planck, loc. cit., § 20.

il contorno σ più volte, sempre però un numero *dispari*, per es. (cfr. la fig. 2) nelle areole 1, 2, 3.

I relativi $\frac{d\sigma \cos \widehat{nr}}{r^2}$ sono eguali in valore assoluto, ma alternativamente positivi e negativi (positivi nelle areole di egresso, come 1 e 3; negativi in quelle di ingresso, come 2). La misura dell'angolo solido $d\Omega$ è espressa, in ogni caso, da

$$\frac{d\sigma |\cos \widehat{nr}|}{r^2};$$

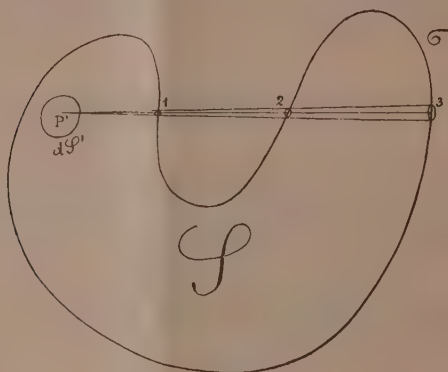


FIG. 2.

si può quindi attribuirle anche la forma

$$d\Omega = \int \frac{d\sigma \cos \widehat{nr}}{r^2},$$

la somma essendo estesa a tutte le areole superficiali incontrate dal cono elementare. Ed è facile riconoscere, sommando i contributi (alternativamente positivi e negativi) provenienti dalle singole areole, che l'energia sfuggente da S nell'unità di tempo, attraverso il detto cono, vale

$$\epsilon dS' \int \frac{d\sigma \cos \widehat{nr}}{r^2} e^{-\alpha r}.$$

L'integrazione, estesa ai vari coni elementari e ai vari dS' , riporta poi subito alla (7); ecc.

8. — MEZZI ETEROGENEI (ISOTROPI).

Il carattere puramente locale della (I) ne lascia presumere la validità anche per mezzi eterogenei a comportamento isotropo. Lo si constata agevolmente, supponendo ϵ, α, K funzioni continue del posto; e così pure la

velocità c con cui si propaga l'energia; tale di più la c che i raggi, che ne rimangono definiti in base al principio di Fermat, ammettano tangenti variabili con continuità.

Con ciò, infatti, fissato un generico punto M del mezzo, è lecito di delimitare attorno ad M un campo S così piccolo che l'emissione, la propagazione e l'assorbimento dell'energia differiscano tanto poco quanto si vuole da quello che avverrebbe in un ipotetico mezzo omogeneo nel quale ϵ, α, K, c avessero dovunque le determinazioni $\epsilon_M, \alpha_M, K_M, c_M$, che ad esse spettano in M . Più precisamente si può dimostrare che l'energia perduta, per emissione, da S nell'unità di tempo, si presenta in definitiva sotto la forma

$$S(\epsilon_M + \delta).$$

δ convergendo a zero con S (si intenda colla massima dimensione di S); quella acquistata, per assorbimento, sotto la forma,

$$S(K_M \alpha_M + \delta^*),$$

δ^* convergendo pure a zero colla massima dimensione di S . Eguagliando, dividendo per S , e passando poi al limite, si conclude giusta l'asserto.

Matematica. — *Della probabilità nelle prove ripetute.* Nota del Socio P. PIZZETTI.

Il teorema di Bernoulli sulla frequenza media di un avvenimento in un numero indefinito di prove identiche, si dimostra di solito esprimendo, per approssimazione, con un esponenziale la probabilità elementare di ogni possibile combinazione. Ma la dimostrazione, quale è esposta nei trattati, è complicata e non rigorosa. In una Nota pubblicata nel 1908 negli Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, mostrai come si possa porre quella dimostrazione al coperto da qualsiasi obiezione, introducendo naturalmente qualche maggiore complicazione nei calcoli.

La dimostrazione che segue è invece estremamente semplice e nulla lascia a desiderare dal lato della esattezza. Essa si deduce facilmente dalle note *diseguaglianze di Cebycef* ⁽¹⁾, e da questo punto di vista non ha nulla di originale. Credo tuttavia utile di dare qui questa dimostrazione, sia per liberarla da talune superflue complicazioni e ridurla così alla sua più semplice forma, sia per mostrare come si possano facilmente trovare dei limiti, più prossimi di quelli dati dalle diseguaglianze di Cebycef, per la probabilità

⁽¹⁾ Ved. Markoff, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leipzig, 1912, pagg. 34 e segg.

che il risultato di un certo numero di prove ripetute sia compreso entro certi limiti.

1. Consideriamo s prove, in ciascuna delle quali l'avvenimento A abbia la probabilità p di presentarsi. Poniamo:

$$(1) \quad P_v = \frac{s(s-1) \dots (s-v+1)}{v!} p^v (1-p)^{s-v}.$$

Sarà, questa P_v , la probabilità che, in s prove, l'avvenimento A abbia a presentarsi v volte e non più. Il numero v può prendere tutti i valori interi da 0 ad s , e, se la sommatoria Σ s'intende estesa a tutti questi valori di v , si avrà evidentemente:

$$(2) \quad \Sigma P_v = 1.$$

Derivando la (1) rispetto a p e moltiplicando per $p(1-p)$, si ha, con ovvie riduzioni:

$$(3) \quad p(1-p) \frac{dP_v}{dp} = (v-sp) P_v.$$

Se pertanto si deriva la (2) rispetto a p e si moltiplica per $p(1-p)$, si ottiene:

$$(4) \quad \Sigma (v-sp) P_v = 0$$

(il che vuol dire che sp è il *valor medio* o la *speranza matematica* di v).

Ripetendo sulla (4) l'operazione ora eseguita sulla (2), e tenendo conto delle (2) (3), abbiamo

$$(5) \quad \Sigma (v-sp)^2 P_v = sp(1-p) = spq.$$

ove si ponga $q = 1-p$. (Questo risultato si può esprimere dicendo che \sqrt{pq} è l'errore medio Gaussiano della ipotesi $v = ps$).

Indichiamo ora con ε un numero reale positivo, e chiamiamo $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_i$ quelli (se pur ve ne sono) fra i possibili valori di v , pei quali risulta

$$(6) \quad (v-sp)^2 > \varepsilon^2 s^2.$$

Denotiamo poi con Σ' quello a cui si riduce la sommatoria Σ , quando la si estenda ai soli valori $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_i$ della v , trascurando tutti gli altri. Poichè nel 1° membro della (5) tutti i termini sono positivi, avremo

$$\Sigma' (v-sp)^2 P_v < pq s.$$

E quindi, per la (6),

$$\varepsilon^2 s^2 \cdot \Sigma' P_v < pq s,$$

ovvero

$$\Sigma' P_v < \frac{pq}{\varepsilon^2 s}.$$

Ora, $\Sigma' P_v$ esprime la probabilità che il numero v soddisfaccia alla disuguaglianza (6). La probabilità Π , che sia invece soddisfatta la relazione

$$(7) \quad |v - sp|^2 \leq \varepsilon^2 s^2$$

sarà dunque

$$\Pi = 1 - \Sigma' P_v > 1 - \frac{pq}{\varepsilon^2 s}.$$

La (7) può anche scriversi

$$\left| \frac{v}{s} - p \right| \leq \varepsilon.$$

Abbiamo dunque una probabilità

$$(8) \quad \Pi > 1 - \frac{pq}{\varepsilon^2 s}$$

che la differenza $p - \frac{v}{s}$ non supererà, in valor assoluto, un valor assegnato ε .

Preso ε piccolo a piacere, si può immaginare il numero s delle prove tanto grande perchè Π differisca da 1 (certezza) di tanto poco quanto si vuole. Il che esprime appunto il teorema di Giacomo Bernoulli.

2. Questo modo di dimostrazione presenta, di fronte a quello ordinariamente seguito, il difetto, che esso non fornisce la nota espressione approssimata, per mezzo dell'integrale di Poisson, della probabilità Π nel caso di un numero grande, ma finito, di prove. Ma nella mia sopracitata Nota ebbi a dimostrare come, in tutti i casi (che sono i più interessanti) in cui la Π è molto prossima ad uno, la approssimazione data dal detto integrale è assolutamente illusoria. D'altra parte, l'assegnare, come è fatto nel precedente paragrafo, un limite inferiore della Π , può in molti casi essere sufficiente. È poi facile, trovare altri limiti [in molti casi, più approssimati di quello fornito dalla (8)], valendosi, invece che della formola (5), delle analoghe formole che danno il valor medio delle quarte, seste ecc. potenze della differenza $v - ps$.

Per ottenere, con una certa speditezza, i detti valori medii, osserviamo che, posto

$$M_n = \Sigma (p - sv)^n \cdot P_v,$$

la formula (3) dà immediatamente

$$M_{n+1} = p(1-p) \left\{ \frac{dM_n}{dp} + sn M_{n-1} \right\}.$$

Questa formola dà modo di calcolare una dopo l'altra le espressioni dei valori medii M_n . Si ha, così,

$$M_3 = s(p - 3p^2 + 2p^3) = spq(q - p),$$

$$M_4 = (3s^2 - 6s)(p^2 - 2p^3 + p^4) + s(p - p^2) = (3s^2 - 6s)p^2q^2 + spq,$$

$$M_5 = 10s^2(p^2 - 4p^3 + 5p^4 - 2p^5) + s(p - 15p^2 + 50p^3 - 60p^4 + 24p^5) = spq(q - p)\{10s - 12\}pq + 1\},$$

$$M_6 = spq\{15s^2p^2q^2 + spq(25 - 130pq) + 1 - 30pq + 120p^2q^2\}, \text{ etc. etc.}$$

Col ragionamento del paragrafo precedente, otteniamo, facendo uso della espressione di M_4 , che la probabilità H della diseguaglianza

$$\left| p - \frac{v}{s} \right| \leq \varepsilon$$

ha un limite inferiore, dato da

$$(9) \quad H > 1 - \frac{1}{\varepsilon^4 s^2} \left[3p^2q^2 + \frac{pq}{s} (1 - 6pq) \right].$$

Valendoci della espressione di M_6 , abbiamo

$$(10) \quad H > 1 - \frac{1}{\varepsilon^6 s^3} [15p^2q^3 + \dots]$$

dove i termini non scritti hanno a divisore s ed s^2 , e sono praticamente trascurabili. Com'è chiaro, queste successive formole danno limiti inferiori sempre più prossimi, nella ipotesi che s sia abbastanza grande. Se supponiamo $s = 10000$, $p = q = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{1}{50}$, abbiamo rispettivamente, dalle (8) (9) (10),

$$H > 0,937, \quad H > 0,988, \quad H > 0,9963.$$

Meccanica. — *Sulla espressione analitica dell'integrale generale dell'equazione delle onde smorzate.* Nota del Corrispondente O. TEDONE.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Petrografia. — Sulla diffusione delle rocce a nefelina nella Libia. Nota preliminare del Corrispondente ETTORE ARTINI.

L'esistenza di rocce a nefelina in alcuni punti della Libia è nota da molto tempo. Fin dal 1880 il van Werveke descriveva minutamente e analizzava una *fonolite* di Msid Gariàn (¹); e sopra questa roccia ritornò poi, con osservazioni particolareggiate, estese anche ad una analoga roccia di Tekut Gariàn, il Rosenbusch nel classico suo trattato (²). Nella stessa opera, questo medesimo autore accenna pure ad un *basalto nefelinico* proveniente da « Tekut. bei Ghadames » (³).

Dopo di questi accenni, quasi incidentali, del Rosenbusch, ch'io mi sappia, altri lavori particolareggiati sulla petrografia delle rocce eruttive della regione libica non furono pubblicati, all'infuori della Nota del Manasse (⁴), nella quale sono descritti due basalti feldspatici olivinici e una andesite augitica, raccolti dal prof. Vinassa sulla via da Ghadames a Tripoli, ma erratici, e ritenuti provenienti, in genere, dal Gebel. Così che il Vinassa, nel suo recente volume (⁵) molto sommariamente, ma esattamente, ebbe a scrivere: « Sembra che le rocce eruttive siano di varî tipi. Furono citati fonoliti e basalti, ed io vi raccolsi, varî tipi di basalte ed una andesite augitica che vennero studiati dal prof. Manasse ». Quest'ultimo lavoro del Manasse poteva lasciar l'impressione che le rocce eruttive prevalenti fossero da ascrivere alla serie gabbro-dioritica, e le rocce a nefelina rappresentassero l'eccezione.

Io ho avuto la ventura di essere incaricato dal sig. ing. cav. Ignazio Sanfilippo dello studio petrografico del vasto materiale di rocce da lui raccolto durante la notissima e fortunosa sua spedizione; e di tale prova di fiducia e di benevolenza sono ben lieto di poterlo qui ringraziar vivamente. Riservandomi di pubblicare poi per esteso i risultati delle ricerche intraprese, voglio ora limitarmi ad una esposizione, affatto sommaria e sintetica, delle mie osservazioni.

(¹) L. v. Werveke, *Mineralogisch-petrographische Mittheilungen*. Neues Jahrb. für Min. Geol. u. Pal., 1880, II, pag. 275.

(²) Rosenbusch, *Mikroskopische Physiographie der Mineralien u. Gesteine*, Bd. II, Zw. Hälfte. *Ergussgesteine*, pp. 961, 962, 965, 969.

(³) Idem. *ibid.*, pag. 1446.

(⁴) E. Manasse, *Sopra alcune rocce eruttive della Tripolitania*, Bollettino d. Soc. geol. ital., XXIV, 1905, pag. 137.

(⁵) P. Vinassa de Regny, *Libya Italica*. Milano, U. Hoepli, 1918, pag. 31.

FONOLITI furono raccolte nelle seguenti località

- a) Gebel Tkut, nel Gariàn (camp. n. 45).
- b) Bacino del Hira, tra Gariàn e Tarhòna (camp. nn. 54, 57, 59 b).
- c) Monti del Gem, a S. O. di Tarhona (camp. n. 61).
- d) Lembi occidentali del Gebel-es-Soda; a circa 70 km. a N. N. O. di Brak (camp. n. 248).

Sono in massima parte fonoliti ad *egirina*; solo nel campione di Gebel Tkut, che è poi identico alla roccia descritta da van Werveke, il pirosseno è piuttosto un'egirinaugite, con mantello egirinico; i prismetti di egirina, spesso fascicolati o in gruppi divergenti, sono ordinariamente cribrosi per inclusione di grande quantità di nefelina in piccolissimi cristalli idiomorfi. La *nefelina* e il *sanidino* sono entrambi abbondanti; in qualche campione, (59 b) per la grande abbondanza della prima si passa a tipi francamente nefelinitoidi. Le segregazioni intratelluriche talora sono quasi mancanti; talora spettano a sanidino, in cristalli geminati secondo la legge di Karlsbad; ma non mancano tipi (camp. 61) con segregazioni di nefelina in nitidi prismi esagonali. Nella fonolite del Gariàn è tipica e abbondante la *sodalite*, già osservata da van Werveke; essa è scarsa o mancante nelle altre, dove invece si trova non scarso l'*analcime*. Accessori: una *orneblenda* catoforitica, la *titanite*, l'*apatite*.

BASALTI NEFELINICI furono trovati:

- a) Nella regione a S-O del Gariàn (camp. n. 37).
- b) Sulle falde settentrionali dei monti del Gariàn (camp. n. 50).
- c) Nel bacino del Hira, tra Gariàn e Tarhòna (camp. n. 59 a).

Sono rocce molto ricche di *augite* bruno-violacea, talune anche di *olivina*, per lo più fresca, e piuttosto povere di *nefelina*; quest'ultima costituisce la massa di riempimento fra i cristalli idiomorfi dei silicati ferromagnesiani, ed è eminentemente allotriomorfa. La determinazione, fatta per via ottica, fu naturalmente controllata per via chimica: il minerale dà subito abbondante gelatina con HCl diluito e freddo, e con la evaporazione si forma una grande quantità di cubetti di cloruro sodico. Abbastanza abbondanti i granuletti minutissimi di *magnetite*; accessori: la *biotite*, in lamelline rosastre, l'*apatite*, e tracce di *egirina*, come mantello esterno di concrescimento sull'augite in alcune plaghette isterogenetiche.

BASANITI NEFELINICHE furono constatate fra le rocce provenienti da:

- a) Gebel Tkut, nel Gariàn (camp. n. 44).
- b) Bacino del Hira, tra Gariàn e Tarhòna (camp. n. 56).
- c) Gebel-es-Soda; regione a sud di Sokna (comp. n. 237).

Queste rocce sono caratterizzate dalla associazione di un plagioclasio basico (*labradorite*) in cristalli geminati, listiformi nella sezione, con *nefelina*, per lo più fresca e non troppo scarsa; il plagioclasio è sempre idiomorfo rispetto alla nefelina, da cui si stacca nettamente per la maggiore birifrazione e il potere rifrangente molto superiore. Anche qui fu eseguita la riprova chimica della determinazione ottica. Tra gli elementi colorati prevale l'*augite*, ma non scarsa è pure l'*olivina*, fresca, o parzialmente alterata con formazione di *iddingsite*. Abbondante la *magnetite*; accessori: *biotite*; *apatite*, *ilmenite*, *analcime*.

Qualche amigdaletta zeolitica si osserva anche macroscopicamente nel camp. n. 237.

I BASALTI FELDSPATICI non mancano tuttavia completamente; e ne trovai fra i campioni raccolti:

a) Nel bacino del Hira, tra Gariàn e Tarhòna (camp. n. 52).

b) Nella regione a Sud del Uadi Beni-Ulid (camp. n. 142 e 142 bis).

Sono rocce alquanto bollose, con abito doleritico, e con tipica struttura intersertale. L'*augite*, bruniccia, si modella nettamente sulle liste di plagioclasio basico (*labradorite*), larghe, geminate albite-Karlsbad, e sulla *olivina*, non scarsa. Quest'ultima è talora fresca, ma più spesso trasformata in *iddingsite*; non è raro vedere l'interno di un cristallo di olivina sostituito interamente da un individuo unico di *iddingsite*, mentre all'esterno si ha un sottile anello di olivina inalterata. La mesostasi vitrea, ricca di microliti fascicolati, augitici e talora anche feldspatici, di lamelle di *ilmenite* e prismetti di *apatite*, occupa i vani angolosi tra gli elementi cristallizzati, ed è variamente abbondante.

Da quanto sono venuto esponendo risulta dunque evidente che, in tutta la vasta regione percorsa dalla spedizione Sanfilippo-Sforza, le rocce basaltiche della serie gabbro-dioritica, cioè i basalti feldspatici, rappresentano una assoluta minoranza, mentre la più gran parte delle rocce eruttive raccolte spetta alla serie foyaitico-theralitica. Devo anzi aggiungere che le analogie e l'aria di famiglia che complessivamente presentano queste rocce, mi fanno ritenere probabile che tutta la regione formi una vera provincia petrografica; ciò che, tuttavia, solo i risultati di molte analisi chimiche e studî più approfonditi e particolareggiati potranno in seguito confermare.

Meccanica. — *Efflusso da un recipiente forato lateralmente.*
Nota di U. CISORTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle funzioni di linee.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

È ormai ben noto che un vero rinnovamento del Calcolo delle Variazioni potrà aversi sol quando questa teoria verrà considerata definitivamente come un capitolo di quel Calcolo funzionale che ha già avuto notevolissimi sviluppi per opera di Volterra, Pincherle, Bourlet, Hadamard, Fréchet, Riesz ed altri, ed al quale pare riserbato, in un futuro assai prossimo, un posto di singolare importanza nell'analisi. Non è quindi ozioso l'occuparsi un poco del come deve impostarsi questo Calcolo funzionale perchè riesca veramente utile ai fini del Calcolo delle Variazioni.

Limitandosi al problema più semplice, a quello relativo a integrali estesi a linee, subito si vede che, nel Calcolo delle Variazioni, si presentano le così dette *funzioni di linee*, e che perciò si è condotti naturalmente al Calcolo funzionale del Volterra.

Scopo di questa Nota è di esaminare il valore del concetto di continuità nella teoria della funzioni di linee, in relazione al problema detto di Calcolo delle Variazioni.

1. Sia dunque $F(x, y, x', y')$ la solita funzione del Calcolo delle Variazioni, finita e continua, insieme colle sue derivate parziali dei primi tre ordini, in un campo A del piano (x, y) e per tutte le coppie (x', y') soddisfacenti alla disuguaglianza $x'^2 + y'^2 \neq 0$. Sia poi C una curva, appartenente al campo detto, continua e rettificabile.

Si consideri l'integrale

$$J(C) = \int_C F(x, y, x', y') ds,$$

dove le x', y' rappresentano le derivate delle coordinate x, y dei punti di C , espresse in funzione dell'arco s della curva stessa, e si supponga che la funzione di linea $J(C)$ sia continua.

Vediamo, innanzi tutto, di definire con esattezza questa continuità.

Diremo che una curva C' (considereremo sempre curve continue, rettificabili) appartiene ordinatamente ad un intorno (ϱ) di C , se è possibile di porre tra le curve una corrispondenza biunivoca, ordinata e continua, tale che la distanza fra due punti corrispondenti qualsiasi risulti sempre minore del numero positivo ϱ .

Diremo, poi, che la funzione di linea $J(C)$ è continua sull'elemento C , se, preso un ε positivo, arbitrario, è sempre possibile di determinare un $\varrho > 0$

tale che, per ogni curva C' di A appartenente ordinatamente all'intorno (ϱ) di C , si abbia

$$|J(C') - J(C)| < \varepsilon.$$

2. Questa continuità, quali particolarità presuppone nella funzione $F(x, y, x', y')$?

Sia P un punto qualsivoglia di C , e si consideri una curva chiusa γ , passante per esso e giacente tutta nel cerchio di centro P e raggio ϱ , cerchio che indicheremo con la scrittura (P, ϱ) . Per ϱ abbastanza piccolo, l'integrale

$$\int_{\gamma} F ds$$

deve essere nullo: e ciò qualunque sia la γ . Ed invero, se ciò non fosse, ad ogni intero n corrisponderebbero sempre infinite curve γ_n , tutte contenute nel cerchio $(P, \frac{1}{n})$ e tutte soddisfacenti o alla disuguaglianza

$$\int_{\gamma_n} F ds > 0,$$

oppure alla contraria. Suppongasi, per fissare le idee, che si verifichi sempre la prima di queste disuguaglianze. Allora, presa una qualsiasi delle curve γ_n , contandola un numero sufficiente di volte, m_n , in modo che sia

$$m_n \int_{\gamma_n} F ds > \delta,$$

dove δ è un numero prefissato, positivo, e unendole la curva C , se ne ottiene un'altra C_n tale che

$$J(C_n) - J(C) > \delta.$$

A questa disuguaglianza devono soddisfare tutte le C_n corrispondenti ad un determinato n : e, ciò qualunque poi sia questo n . E poichè tutte le C_n risultano appartenenti ordinatamente all'intorno $(2 \frac{1}{n})$ di C , ne viene che la funzione di linea J non può essere continua sulla C .

È dunque provato che, per ϱ abbastanza piccolo, l'integrale della F esteso alle γ è nullo, e se ne deduce, sempre per lo stesso ϱ , che il medesimo integrale, esteso ad una qualsiasi curva congiungente P con un punto arbitrario di (P, ϱ) , e giacente per intero in tal cerchio, è indipendente dal cammino d'integrazione. Per ciascuna di tali curve è allora nulla la variazione prima dell'integrale della F : vale a dire, è soddisfatta l'equazione differenziale di Eulero

$$F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - x''y') = 0,$$

dove F_1 rappresenta l'invariante di Weierstrass della F . Questa equazione risulta quindi soddisfatta identicamente nel cerchio (P, ϱ) , il che porta che sia identicamente

$$F_1 = 0, \quad F_{xy'} = F_{yax'}.$$

Essendo

$$F_1 = \frac{F_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2},$$

la prima delle precedenti identità mostra che $F_{x'}$ e $F_{y'}$ sono indipendenti da x' e y' , che è cioè $F_{x'} = P(x, y)$, $F_{y'} = Q(x, y)$; e la seconda, che queste P e Q verificano l'uguaglianza

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y).$$

Tutto questo avviene nel cerchio (P, ϱ) . E poichè P è scelto comunque su C si può concludere, in forza di un noto ragionamento, che

l'ipotesi della continuità della $J(C)$ sulla curva C , porta che, per tutti i punti di A distanti da C per meno di un certo ϱ_1 , è

$$F(x, y, x', y') = x' F_{x'} + y' F_{y'} = x' P(x, y) + y' Q(x, y),$$

con $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$

Se poi la $J(C)$ è continua su qualunque C di A , le uguaglianze qui scritte valgono in tutto il campo.

3. Da quanto precede, si vede che l'ipotesi della continuità è di troppo restrittiva, portando ad escludere tutti quegli integrali che veramente interessano nel Calcolo delle Variazioni.

La continuità è dunque da scartarsi, almeno nella forma nella quale fu posta più sopra. Si potrebbe però pensare ad una continuità di natura più larga, per esempio alla continuità di ordine 1 dell' Hadamard (secondo il quale, la precedente sarebbe di ordine zero), ed anche a quest'altra, che starebbe fra quella definita più sopra e quella detta or ora dell' Hadamard, e che si può fissare così: la funzione $J(C)$ è continua sull'elemento C se, preso un ε positivo, arbitrario, è sempre possibile di determinare un $\varrho > 0$ tale che, per ogni curva C' di A , appartenente all'intorno (ϱ) di C , e tale che sia

$$|\text{lunghezza } C' - \text{lunghezza } C| < \varrho,$$

si abbia

$$|J(C') - J(C)| < \varepsilon.$$

Secondo questa definizione, la funzione $J(C)$, qualunque sia la $F(x, y, x', y')$ (purchè soddisfacente alle condizioni iniziali da noi poste al n. 1), risulter-

rebbe *sempre* funzione continua. Ed infatti, come ho altrove dimostrato ⁽¹⁾, sta la seguente proposizione: « Se la curva C' tende alla C , in modo che differenza delle rispettive lunghezze tenda a zero, è

$$\lim_{C' \rightarrow C} \int_{C'} F ds = \int_C F ds;$$

e ciò vale, solo che la F soddisfi alle condizioni poste al principio del n. 1. Possiamo anzi aggiungere ⁽²⁾ che la condizione del tendere allo zero della differenza delle lunghezze delle curve C' e C , è non solo sufficiente, bensì anche necessaria, affinchè si abbia l'uguaglianza precedente, tutte le volte che l'invariante di Weierstrass si mantenga diverso da zero sulla C e per qualunque coppia x', y' tale che sia $x'^2 + y'^2 \neq 0$. Questo mostra, in particolare, che neppure aggiungendo una limitazione sulla lunghezza delle curve da considerare (limitazione che si presenta spontaneamente per es., in molti problemi isoperimetrici) è possibile di render continui, secondo la definizione del n. 1, gli integrali relativi al caso *regolare* (pei quali l'invariante di Weierstrass si mantiene, precisamente, sempre diverso da zero).

4. Peraltro, la definizione di continuità ora proposta non presenta di fronte ai problemi di calcolo delle variazioni, quel medesimo valore che la continuità delle funzioni di variabili numeriche ha rimpetto alle questioni di massimo e minimo. Ciò che, invece, sembra rispondere alle esigenze del calcolo delle variazioni, è il concetto di *semicontinuità*, che Baire ha fissato per le funzioni del calcolo ordinario e che io ho già cercato di introdurre nelle questioni che qui ci occupano.

Il concetto di *semicontinuità* si ha analizzando quello di continuità, preso, nel caso nostro, nella forma del n. 1, scindendolo nei suoi due elementi costitutivi.

Diremo che la $J(C)$ è *semicontinua inferiormente (superiormente)* sull'elemento C , se, preso un ε positivo, arbitrario, è sempre possibile di determinare un $\varrho > 0$ tale che, per ogni curva C' di A , appartenente ordinatamente all'intorno (ϱ) di C , si abbia

$$J(C') - J(C) > \varepsilon \quad (< \varepsilon).$$

Come è evidente, se la $J(C)$ è semicontinua, tanto inferiormente quanto superiormente, è anche continua nel senso del n. 1.

Ciò che è essenziale, circa il valore della semicontinuità, è questo: le funzioni semicontinue inferiormente (superiormente) si comportano, di fronte

⁽¹⁾ *Sugli integrali curvilinei del calcolo delle variazioni*, Nota II (Rend. R. Acc. Lincei, 1912, 1° sem.).

⁽²⁾ Cfr. L. Tonelli, *Sugli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni*. Nota III (Rend. R. Acc. Lincei, 1912, 2° sem.).

ai minimi (massimi), proprio come le funzioni continue. Si tratta però di vedere se questo concetto di semicontinuità porti o no a scartare i casi più interessanti del calcolo delle variazioni. Qui la risposta è confortante. Si può, infatti, dimostrare ⁽¹⁾ che, se l'invariante di Weierstrass, F_1 , si mantiene sempre diverso da zero (caso detto *regolare*), $J(C)$ è una funzione semicontinua: e precisamente, semicontinua inferiormente, se è $F_1 > 0$; superiormente, se $F_1 < 0$.

5. Questa semicontinuità fu già da me ⁽²⁾ applicata alla dimostrazione dell'esistenza del minimo nel caso in cui siano verificate entrambi le condizioni $F > 0$, $F_1 > 0$; ed anche nell'altro, $F > 0$, $F_1 \geq 0$. Qui mi propongo di mostrare come da essa scenda immediatamente anche l'esistenza del minimo nel così detto *problema discontinuo*, in quello cioè nel quale la funzione F , che si tratta di integrare, presenta delle discontinuità nel campo in cui la si considera.

Tale problema ha un'importanza pratica, perchè ad esso conducono diverse questioni di fisica-matematica, delle quali citeremo solo quella relativa alla propagazione della luce attraverso un mezzo composto di parti eterogenee, per le quali l'indice di rifrazione presenti delle discontinuità.

Supponiamo, per semplificare il ragionamento, che ci sia una sola discontinuità: vale a dire, che il campo A , che supporremo limitato, sia diviso da una linea Γ in due altri $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, nei quali si abbia, rispettivamente,

$$F = F^{(1)} \quad , \quad F = F^{(2)} \quad ,$$

dove queste $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ saranno funzioni aventi, ciascuna nel proprio campo, le stesse proprietà enunciate per la F al principio del n. 1. Si supponga, inoltre, che si abbia sempre (eccettuate le solite coppie x' , y' verificanti l'uguaglianza $x'^2 + y'^2 = 0$)

$$F^{(1)} > 0 \quad , \quad F_1^{(1)} > 0 \quad ; \quad F^{(2)} > 0 \quad , \quad F_1^{(2)} > 0 \quad .$$

Presi due punti $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, rispettivamente in $A^{(1)}$ e $A^{(2)}$, si consideri una curva (continua e rettificabile) α , congiungente i punti detti e composta di due archi $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, il primo dei quali sia contenuto in $A^{(1)}$ (contorno compreso), e il secondo in $A^{(2)}$ (pure contorno compreso).

Dico che, fra tutte le possibili curve α , ve n'è una almeno per la quale

$$\int_{\alpha} F \, ds = \int_{\alpha^{(1)}} F^{(1)} \, ds + \int_{\alpha^{(2)}} F^{(2)} \, ds$$

è minimo (assoluto).

⁽¹⁾ L. Tonelli, *Sul caso regolare nel calcolo delle variazioni* (Rendic. Circ. mat. di Palermo, 1913, 1° sem.).

⁽²⁾ loc. cit.

Sia $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$, una successione minimizzante, tale cioè che $\int_{\alpha_n} F ds$ tenda al limite inferiore i dell'integrale della F esteso a tutte le possibili curve α . Osserviamo, prima di proseguire, che l'esistenza di questa successione è del tutto indipendente dal postulato di Zermelo, come risulta da una mia Nota: *Sul valore di un certo ragionamento* (1).

Indicheremo con O_n il punto di α_n che divide questa stessa curva nelle sue due parti $\alpha_n^{(1)}, \alpha_n^{(2)}$. O_n giace necessariamente su Γ , e la successione $O_1, O_2, \dots, O_n, \dots$ ammette (su Γ) uno o più punti limiti. Sia O uno di essi. Possiamo, senz'altro, ammettere che sia addirittura $O = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$. Le

lunghezze delle α_n sono tutte inferiori ad un numero fisso, perchè è sempre $F^{(1)} > 0$, $F^{(2)} > 0$. Tali curve ammettono perciò una o più curve limiti. Se $\bar{\alpha}$ è una di esse, questa $\bar{\alpha}$ dovrà passare per O , e sarà la curva a cui tenderà una successione $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \dots$, estratta dalla $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. E avremo, per la *semicontinuità inferiore*,

$$\int_{\alpha^{(1)}} F^{(1)} ds \leq \text{Minlim}_{n_r \rightarrow \infty} \int_{\alpha_{n_r}^{(1)}} F^{(1)} ds$$

$$\int_{\alpha^{(2)}} F^{(2)} ds \leq \text{Minlim}_{n_r \rightarrow \infty} \int_{\alpha_{n_r}^{(2)}} F^{(2)} ds,$$

e quindi

$$\int_{\alpha} F ds \leq \text{Minlim}_{n_r \rightarrow \infty} \int_{\alpha_{n_r}} F ds = i,$$

donde

$$\int_{\alpha} F ds = i,$$

e $\bar{\alpha}$ è una curva *minimum*.

Le condizioni poste, relative all'invariante di Weierstrass, $F^{(1)} > 0$, $F^{(2)} > 0$, non sono essenziali e possono sostituirsi con le altre $F^{(1)} \geq 0$, $F^{(2)} \geq 0$.

Possiamo aggiungere, terminando, che, anche nel caso attuale, dalla semicontinuità in $J(C)$ scende il teorema di Osgood, il cui enunciato e le cui dimostrazioni sono identici a quelli dei nn. 19 e 20 del mio citato lavoro: *Sul caso regolare ecc.*

(1) Atti R. Acc. delle scienze, di Torino, 1913.

Geografia fisica. — *Prima relazione della spedizione scientifica nel Karakoram orientale*, trasmessa al PRESIDENTE dal Capo della spedizione dott. FILIPPO DE' FILIPPI.

Il Presidente BLASERNA dà comunicazione della seguente lettera, con la quale il dott. DE FILIPPI accompagna la Relazione più sotto riportata:

Skardu, Baltistan, 5 novembre 1918.

Illustre Professore,

Sono lieto di mandarle per i Lincei una breve relazione del lavoro a tutt'oggi compiuto dalla Spedizione scientifica alla quale l'Accademia ha accordato il suo appoggio morale e finanziario.

Possiamo esser soddisfatti dei frutti raccolti in queste poche settimane di attività, i quali fanno sperare un risultato finale non indegno delle lusinghiere prove di fiducia accordate alla impresa fin dal suo inizio.

Mi è grata l'occasione per trasmetterle, insieme cogli ossequi dei componenti la spedizione, i miei più cordiali saluti e l'espressione della mia devozione.

Dott. FILIPPO DE FILIPPI.

*
* *

La spedizione asiatica organizzata dal dott. De Filippi ha ora felicemente raggiunto Skardu, nel Baltistan, dove si propone di svernare, ed invia il seguente resoconto del lavoro già compiuto e di quello in corso.

La spedizione, dopo avere eseguito le necessarie osservazioni nel Regio Istituto idrografico di Genova, stazione base delle misure gravimetriche, si imbarcò a Marsiglia l'8 agosto, giunse a Bombay il 22, e ripartì lo stesso giorno in ferrovia. Il prof. Dainelli, il ten. Antilli ed il marchese Ginori, colla guida Petigax, si recarono direttamente nel Kashmir, mentre il dottore De Filippi saliva a Simla, la residenza estiva del Governo dell'India, per prendere accordi intesi a coordinare il lavoro della spedizione con quello dei vari dicasteri tecnici indiani, ed il comandante Alessio, insieme col prof. Abetti, si rivolgeva a Dehra Dun, dove ha sede l'Ufficio trigonometrico e geodetico dell'India. Quivi, fra il 25 agosto ed il 4 settembre, essi eseguivano, cogli strumenti della spedizione una completa serie di osservazioni gravimetriche e magnetiche. Vennero anche fatte in questi giorni le prime esperienze di trasmissioni radiotelegrafiche di segnali di tempo con Delhi, Simla e Lahore, per mezzo della stazione ricevitrice di cui è fornita la spedizione.

L'8 settembre, tutta la comitiva era riunita a Srinagar nel Kashmir, dove fra il 12 ed il 19 l'Alessio e l'Abetti eseguivano la stazione gravimetrica e magnetica. Due giorni dopo, venne iniziato il viaggio in carovana,

ed il 26 si attraversò lo spartiacque imalaiano per il passo Zoji-La (3390 m.). Da questo punto fino a Skardu la marcia venne interrotta due volte per le osservazioni di gravità e di magnetismo. La prima stazione si fece a Dras (3090 metri), paesetto situato nella valle omonima, ai piedi del valico imalaiano; la seconda a Tolti (circa 2500 metri), piccolo villaggio balti nella valle dell'Indo. Gli osservatori riuscirono a creare le condizioni migliori per il loro lavoro, per modo che esso si poté eseguire col più rigoroso metodo scientifico e con tutte le garanzie di esattezza richieste da queste ricerche. Il cielo quasi sempre sereno ha finora permesso di compiere molto regolarmente le osservazioni astronomiche, sia quelle connesse colla gravimetria, sia quelle rivolte a determinare la latitudine e la longitudine delle stazioni.

Dovunque la spedizione si è fermata per qualche giorno, è stata montata la stazione meteorologica affidata al marchese Ginori, e ne vennero raccolti regolarmente i dati. Inoltre si è cercata ogni occasione per fare letture strumentali comparative, le quali, oltre ad essere un continuo controllo sul funzionamento degli apparecchi, potranno condurre ad interessanti conclusioni sui limiti di precisione dei vari strumenti, con speciale riguardo alle determinazioni altimetriche.

Queste fermate, e la lentezza della marcia, hanno dato al geologo prof. Dainelli occasione e possibilità di fare frequenti escursioni nel Kashmir e nelle valli del Dras e dell'Indo, e di raccogliere molti dati che lo hanno condotto a conclusioni nuove ed assai interessanti rispetto alla costituzione ed alla storia geologica della regione attraversata. Il materiale litologico raccolto viene man mano spedito in Italia.

Attivissima è pure stata l'opera del ten. Antilli, il quale, oltre a coadiuvare il prof. Dainelli nella documentazione fotografica per quel che riguarda la geologia, ha portato l'utile sussidio della fotografia ai lavori topografici, ed ha raccolto una buona illustrazione di luoghi e di genti.

La spedizione arrivò a Skardu il 25 ottobre, e si stabilì in due piccoli *bungalows*, utilizzando, per i laboratori ed i magazzini, i locali del serai indigeno. Skardu, la capitale del Baltistan, è un piccolo villaggio sulle rive dell'Indo, a 2287 metri sul mare. L'alta valle dell'Indo, compresa fra Imalaia e Karakoram, generalmente angusta e profondamente intagliata fra coste montane ertissime, qui si apre in un vasto spiano coperto di ciottoli e di sabbie, nel mezzo del quale confluisce coll'Indo il fiume Shigas, nato da alcuni fra i più grandi ghiacciai del Karakoram.

Quattro giorni dopo l'arrivo, si poteva già eseguire una esperienza di molto interesse. L'Alessio e l'Abetti, avendo messo su la stazione radiotelegrafica ricevitrice, poterono nelle sere del 29 e del 30 ricevere con grande chiarezza e registrare i segnali di tempo radiotelegrafici trasmessi dalla stazione di Lahore, secondo uno schema prestabilito. Questa esperienza preliminare sarà seguita da una serie di trasmissioni di segnali di tempo in-

viati dalla stazione di Lahore e contemporaneamente ricevuti da Dehra Dun e dalla stazione della spedizione. Fino a che si sarà nella valle dell' Indo, che è compresa nella triangolazione dell' India, questi serviranno a calcolare differenze di longitudine con esattezza sufficiente per determinare, insieme colle osservazioni di latitudine, la deviazione della verticale. Più oltre, le dette segnalazioni permetteranno di determinare l'andamento dei cronometri e la longitudine dei luoghi nel rilevamento della regione sconosciuta che la spedizione si propone di esplorare nell'estate ventura. Rimane intanto dimostrata la possibilità di applicare questo metodo a stazioni di campagna anche se situate fra catene di altissimi monti.

Si sono già iniziati da parte del marchese Ginori i lanci di palloni piloti seguiti col teodolite, contemporanei a quelli eseguiti da varî osservatori indiani, secondo un piano concordato per lo studio delle correnti dell'alta atmosfera, che ha un interesse speciale in questa regione.

Infine, nei primi giorni di novembre, i membri della spedizione hanno fatto una escursione su per la valletta che sale al Burji-La ed all'altipiano Devsai, ed hanno scelto un piccolo ripiano a circa 4300 metri sul mare, dove si stanno ora trasportando il bagaglio da campo e quello scientifico, colla speranza di potervi fare, ad onta della stagione inoltrata, una stazione gravimetrica e magnetica, osservazioni sulla radiazione totale solare con pireliometri di vario modello, lanci di palloni piloti e lavori telefotografici.

Terminato questo lavoro, il gruppo tornerà a Skardu, per farvi le osservazioni di gravità e di magnetismo, la determinazione di longitudine e di latitudine, varî lavori topografici e studi meteorologici ed aerologici; mentre il prof. Dainelli continuerà le sue escursioni geologiche, fino a che non glie lo impediranno le nevi invernali, ormai prossime.

Il materiale scientifico non ha subito alcun guasto nel lungo e complicato viaggio, ed è in perfette condizioni; e tutti i membri della spedizione hanno sempre goduto ottima salute. In tutto il suo cammino la spedizione è stata dovunque accolta col massimo favore ed aiutata in tutti i modi dalle Autorità locali e dalle popolazioni.

Chimica. — *La distillazione della nitroglicerina a bassa temperatura* ⁽¹⁾. Nota di D. CHIARAVIGLIO e O. M. CORBINO, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

Da un esame del gran numero di lavori finora pubblicati sulle proprietà fisiche della nitroglicerina, non risulta che alcuno sia mai riuscito a preparare una sensibile quantità di liquido per distillazione. Ciò si spiega col fatto che, mentre a bassa temperatura la nitroglicerina ha una tensione di vapore piccolissima, che noi abbiamo potuto in un precedente lavoro ⁽²⁾ stabilire come inferiore a 1/10.000 di millimetro alla temperatura di 20°, non si può d'altra parte scaldare il liquido a temperature anche di poco elevate, senza determinarne l'alterazione.

Un tentativo di distillazione a 70° nel vuoto più spinto, ma senza speciali disposizioni, non ci diede, come già avemmo occasione di riferire, risultati incoraggianti; poichè si raccolse una quantità piccolissima di distillato, nè parve opportuno di prolungare ulteriormente l'operazione, anche perchè si ebbe il sospetto che i vapori prodotti si decomponessero nello spazio tenuto a 70°, prima di raggiungere il condensatore.

In un recente lavoro di Snelling e Storm ⁽³⁾ la nitroglicerina venne sottoposta a forti riscaldamenti sotto la pressione ordinaria; e fu così osservato che a circa 145° la decomposizione del liquido è così rapida da manifestare gli aspetti di una vera ebollizione. Tenendo a lungo costante la temperatura del liquido, la cui decomposizione è accompagnata da sviluppo di calore, i due autori riuscirono a raccogliere, in un recipiente connesso col serbatoio della nitroglicerina, una notevole quantità di distillato, che appariva diviso in due strati: uno aveva l'aspetto di nitroglicerina, l'altro era costituito da acido nitrico diluito. La prima parte, fortemente colorata in giallo-verde, venne accuratamente disacidificata, lavata e dissecata; e rivelò, al nitrometro un contenuto in azoto del 13,5 %; mentre la nitroglicerina adoperata aveva primitivamente un contenuto in azoto del 18,45 %. Più profonde modificazioni rivelò l'esame del residuo non distillato, che aveva anche perduto le energiche proprietà esplosive.

È chiaro da tutto ciò che la prova fatta da Snelling e Storm non può considerarsi come una riuscita distillazione della nitroglicerina, poichè il

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel « Laboratorio chimico per le sostanze esplosive ». Ministero dell'Interno. - Roma.

⁽²⁾ Chiaraviglio e Corbino, *Gazzetta chimica*, tom. XLIII, 2ª, pag. 390, an. 1913.

⁽³⁾ Snelling e Storm, *Zeitschr. f. d. Ges. Schiess- und Sprengstoffwesen*, tom. 8, pag. 1, an. 1913.

prodotto e il residuo della distillazione risultano evidentemente da un complesso di composti sottonitrati della glicerina.

Era quindi necessario di procedere per ben altra via, e tentare la distillazione a freddo, tra la temperatura ordinaria e un refrigerante a temperatura più bassa, sotto rarefazioni grandissime, e con opportuni accorgimenti perchè, non ostante la piccolissima tensione del vapore e la sua facile decomponibilità, esso affluisse in misura sensibile verso il condensatore. Occorreva perciò costruire un apparecchio nel quale si potessero praticare le rarefazioni estreme che le attuali macchine a vuoto son capaci di produrre, e far sì che il vapore, svolgendosi a temperatura ordinaria, non incontrasse alcun ostacolo nell'avviarsi verso il condensatore.

Dopo diversi tentativi ispirati da questi criteri, siamo pervenuti alla costruzione dell'apparecchio della fig. 1, col quale ci è stato possibile distillare circa 10 grammi di nitroglicerina tra le temperature di 25° e 0°, nella durata di circa 44 ore.

L'apparecchio è costituito essenzialmente da un pallone di vetro, C (fig. 1), a largo collo, al quale può applicarsi un grande tappo a smeriglio, E, la cui tenuta è assicurata dalla chiusura a mercurio F. Il tappo E sostiene un sistema risultante da una capsula in vetro, A, per contenere la nitroglicerina (circa 16 grammi), da un riscaldatore elettrico in spirale di platino (M) chiusa entro una scatola a doppio fondo, e da un termometro (non segnato in figura) di cui il bulbo pesca nella nitroglicerina della capsula. I capi della spirale seguendo i tubi BB GG passano attraverso al grande tappo di vetro che chiude il collo del pallone, e si può così, per mezzo di una corrente elettrica esattamente graduabile, portare la temperatura del liquido al punto voluto. Il pallone è immerso per circa due terzi in una miscela di acqua e ghiaccio, che ne mantiene la parete a circa 0°, mentre la corrente elettrica nella spirale permette che la temperatura del liquido si conservi prossima a 25°.

Il pallone, per mezzo di una tubatura innestata nel tappo, attraverso al rubinetto con chiusura di mercurio H, può mettersi in comunicazione con una pompa Gaede a mercurio (munita, come al solito, del palloncino con anidride fosforica per il disseccamento) e con un provino di Mac-Leod. Si potevano così stabilire o interrompere le comunicazioni con la pompa, il disseccante e il provino; mentre, per la grande cura spesa a migliorare le chiusure, fu possibile di mantenere nel pallone una rarefazione gassosa inferiore a 1/10.000 di millimetro, anche dopo aver interrotto la comunicazione con la pompa. Restava, come è naturale, la pressione dei vapori di mercurio; essa era ridotta a quella che corrisponde a 0°, e un continuo afflusso di vapori di mercurio era impedito dal fatto che le comunicazioni con la pompa e il provino erano normalmente interrotte.

Si adoperò per l'esperienza nitroglicerina di fabbricazione corrente, che resisteva a 15 minuti primi, ad una temperatura di 80° C., senza decomporsi

(saggio Abel); era leggerissimamente giallastra. Durante la distillazione fu sorvegliato con cura l'andamento del termometro, e regolata la corrente nella spirale in modo che la temperatura del liquido si mantenesse, come si è detto, prossima a 25°. Occorreva pure a lunghi intervalli ristabilire la comunica-

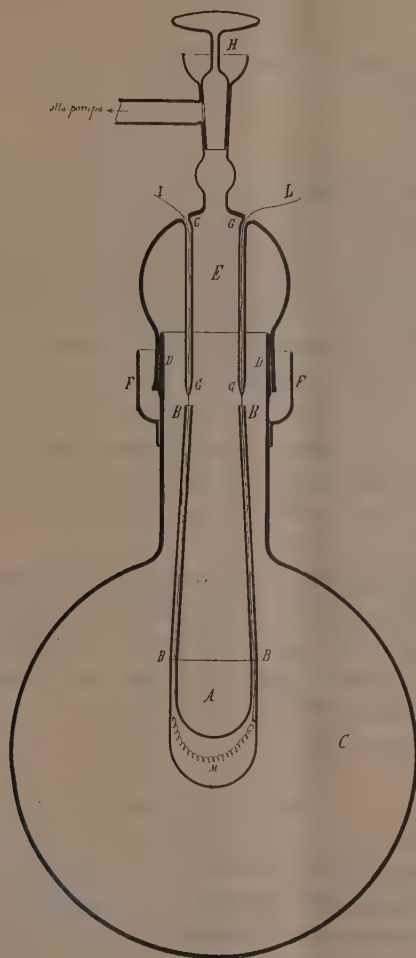


FIG. 1.

zione con la pompa, e aspirare con questa le piccole quantità di gas rivelate dal Mac-Leod, e che provenivano in parte dalle chiusure, in parte anche dalla lenta decomposizione del liquido o dei suoi vapori. Si procurò, così, che la pressione residua fosse sempre inferiore a $1/10.000$ di mm.

La condensazione si produceva sulla parete del pallone tenuta a 0°, dove andavan formandosi minutissime goccioline molto fitte, e che si andavano

assai lentamente ingrossando. A poco a poco il distillato si andò raccogliendo per la maggior parte al fondo del pallone, conservando lo stato liquido, non ostante che la temperatura fosse inferiore a quella di solidificazione; ciò era dovuto alla nota difficoltà di congelamento che la nitroglicerina presenta.

La distillazione fu interrotta quando nella capsula non vi era più che un terzo circa del liquido primitivo. Raccolto il distillato, si constatò che esso era costituito da un liquido perfettamente limpido e incolore, mentre quello rimasto nella capsula era di un giallo un poco più intenso che non il liquido primitivo.

Nell'esame preliminare del liquido distillato la leggera variazione di tinta da quella del liquido primitivo e del residuo di distillazione fu l'unica differenza che potemmo osservare. Le altre proprietà sembrano rimaste le stesse. Così, ad esempio, la resistenza al calore fu sempre di 15' a 80°, tanto nel liquido distillato, quanto nel residuo.

Ci proponiamo di proseguire le esperienze, per stabilire un più esatto confronto fra le proprietà della nitroglicerina ordinaria e quelle della distillata; e inoltre per dedurre, se ci sarà possibile, la tensione di vapore a diverse temperature, misurando la velocità del processo di distillazione.

I dati che attualmente possediamo, ci permettono già di fare un calcolo approssimativo sul valore della pressione a 25°, utilizzando la formola proposta recentemente da Langmuir ⁽¹⁾ nelle sue ricerche sulla tensione di vapore del tungsteno.

Detta m la quantità di sostanza evaporata da 1 cm² del liquido in un secondo, nelle condizioni per cui si può ammettere che ogni molecola partita dalla superficie del liquido, non incontrando ostacoli nel suo cammino, finisca col raggiungere la superficie condensante: e indicando con T la temperatura assoluta, con M il peso molecolare e con p la pressione del vapore corrispondente alla temperatura T , si ha

$$p = \sqrt{\frac{2\pi RT}{M}} m.$$

In misure assolute C. G. S. si può porre R (costante dei gas) eguale a 83×10^6 ; con ciò p risulta misurata in dine per centimetro.

Coi dati delle nostre esperienze, essendo 10 grammi la quantità di liquido evaporato in 44 ore, e da una superficie di circa 10 cm², si può calcolare che la pressione a 25°, ridotta in millimetri di mercurio, equivale a 1,2 diecimillesimi. E poichè la temperatura ha notevole influenza su queste pressioni di vapore molto basse (così, per il mercurio, l'aumento di 10° nella temperatura in vicinanza di 20° basta a triplicare la pressione), non sarà azzardato il dedurre che a 20° quella pressione sia inferiore a un diecimillesimo di millimetro, come appunto avevamo potuto affermare nel lavoro sopra citato.

⁽¹⁾ Irving Langmuir, The Phys. Review, t. 11, pag. 329, nov. 1913.

Fisica. — *Su l'analogo elettrico del fenomeno di Zeeman: effetto longitudinale.* Nota di ANTONINO LO SURDO, presentata dal Socio A. RÖRTI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulle proprietà dell'iodio come solvente crioscopico.* Nota di F. OLIVARI ⁽¹⁾, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

4. Traendo profitto della circostanza che nell'alogeno fuso sono facilmente solubili gli elementi del 6° gruppo — S, Se, Te —, io ho studiato, qualche anno fa, il contegno crioscopico di questi metalloidi in soluzione iodica, giungendo a risultati numerici che vennero in seguito controllati da Beckmann ⁽²⁾.

La tabella seguente riassume alcune nuove misure:

TAV. IV.

conc. %	Δ	PM(K=213)	conc. %	Δ	PM
	$S_8 = 256$			$Se_8 = 158,4$	
			0.1520	0.29	111.7
			0.3274	0.60	116.2
0.2894	0.33	184	0.5106	0.905	120.2
0.6138	0.645	202.7	1.028	1.67	131.1
0.8172	0.825	211	(5.038)	(6.87)	(156.2)
				$Te = 127.6$	
1.068	1.025	222.1	(3) 0.2361	0.345	145.8
1.376	1.24	236.5	0.4215	0.61	147.2
2.134	1.81	251.2	(4) 0.1210	0.192	134.2
3.167	2.565	257.5	0.4766	0.72	141.0
4.730	3.85	261.7			

Lo zolfo dimostra in iodio una grandezza molecolare dell'ordine S_8 ; tuttavia, in soluzione diluita assume valori sensibilmente più piccoli.

Le depressioni prodotte dal selenio corrispondono ad un peso molecolare compreso fra Se e Se_8 ; solo in soluzioni molto concentrate si ottengono valori prossimi alla molecola biatomica.

Il tellurio, la cui miscela col solvente è accompagnata da fenomeni termici evidentissimi (sviluppo di calore), fornisce abbassamenti che si avvicinano a quelli calcolati per $Te = 127,6$. Questi valori crioscopici si spie-

(1) V. questi Rendiconti vol. precedente XXII, 2° sem. 1913, pag. 697.

(2) Z. anorg. Chem., 63, pag. 63 (1909).

(3) « Tellur in Stangen » Kahlbaum.

(4) « Tellur puriss. subl. in Nadeln » T. Schuchardt.

gano, in gran parte, ricordando che, per fusione reciproca dei due elementi, si formano combinazioni del tipo TeI_x ⁽¹⁾.

Meno agevole appare invece la interpretazione dei risultati relativi allo zolfo (soluzioni diluite) e specialmente al selenio. Infatti, poichè la grandezza molecolare di questi metalloidi in mezzi indifferenti è normalmente ottoatomica, la minore complessità ottenuta in iodio sembrerebbe indicare l'intervento di un'azione chimica tra solvente e soluto. Per contro lo studio completo degli equilibri di congelamento tra i metalloidi e l'iodio esclude la esistenza di ioduri di zolfo e di selenio, capaci almeno di cristallizzare dalla fase liquida ⁽²⁾.

L'argomento del quale da tempo mi occupo, richiede ulteriori esperienze e merita una discussione più ampia di quella che mi sarebbe consentita dalla brevità di questa Nota; perciò mi riprometto di trattarne *ex professo* in un prossimo lavoro, tanto più che il prof. Beckmann ha dedicato allo stesso studio una recentissima Memoria, dal titolo: « Verhalten von Jod zu Schwefel, Selen und Tellur » ⁽³⁾. Le ricerche crioscopiche ed ebullioscopiche di questo autore, di cui mi limito qui a riferire i risultati sperimentali per il confronto coi miei, provano:

1°) che lo zolfo in soluzione iodica, possiede essenzialmente la molecola S_8 , ma non si rileva alcun andamento speciale a bassa concentrazione;

2°) che il selenio viene scomposto sino alle molecole Se_2 e Se , non tanto in virtù della temperatura a cui si sperimenta, quanto per una influenza specifica del solvente;

3°) che il tellurio e l'iodio reagiscono fra di loro, con formazione di molecole le quali contengono meno di Te_2 .

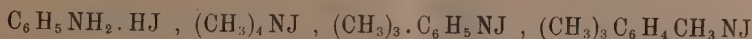
5. Per le determinazioni relative agli ioduri mi sono servito di uno dei consueti dispositivi che permettono di operare in ambiente perfettamente secco, essendo molti di questi sali anidri — o i rispettivi poliioduri — in alto grado igroscopici.

⁽¹⁾ Berzelius, Ann. de Chemie et phys., 58 (1835); Metzner, *ivi*, (7) 1898; Wheeler, Z. für anorg. Chem. 3 (1893); Gutbier e Hury, *ivi*, 32 (1902); Jaeger e Menke, Z. für anorg. Chem., 75, pagg. 241, e 77, pag. 320 (1913).

⁽²⁾ Cfr. Pellini e Pedrina, Rend. Acc. Lincei, XVII, serie 5^a, pag. 78 (1908); Olivari, Rend. Acc. Lincei, XVII, 2° sem., serie 5^a, pag. 512 (1908). Forse nei miscugli fusi $\text{S} - \text{J}$ e $\text{Se} - \text{J}$ (specialmente in quest'ultimo caso) v'è luogo a supporre l'esistenza di composti parzialmente dissociati, i quali, per raffreddamento, anzichè separarsi allo stato solido, si scompongono in un miscuglio meccanico dei componenti. Cfr. la mia Nota « Studi sull'analisi termica », III, Rend. Soc. chim. ital., 1911.

⁽³⁾ Z. für anorg. Chem., Band. 80, pag. 221 (1913).

Dai risultati ottenuti e dalla loro rappresentazione grafica (tav. V fig. 2) emerge che i pesi molecolari degli ioduri alcalini (KJ , RbJ , NH_4J) e degli ioduri ammonici organici .



presentano in iodio fuso un andamento anormale caratteristico e uniforme: in soluzioni diluitissime, i pesi molecolari sono molto prossimi ai normali;

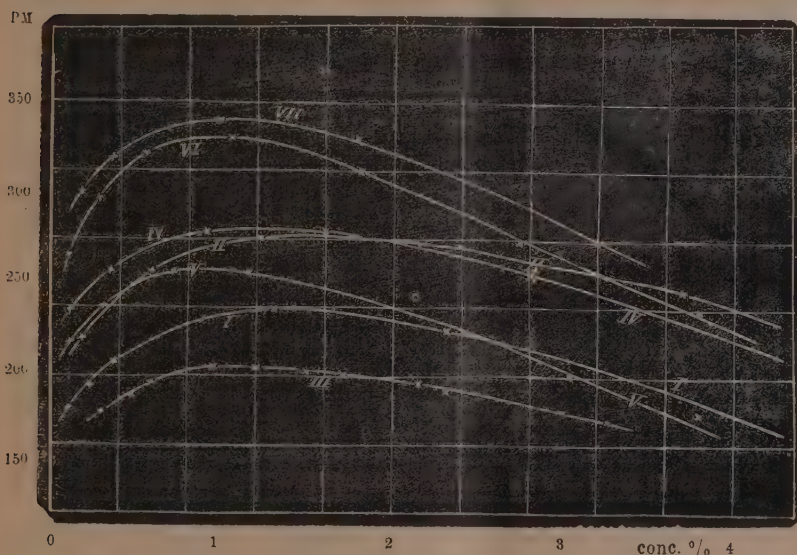


FIG. 2.

aumentano rapidamente colla concentrazione sino ad un massimo poi decrescono con continuità e, a concentrazioni elevate, assumono talvolta valori inferiori al teorico.

La discussione di questo interessante decorso dei pesi molecolari riesce particolarmente istruttiva nel caso dell'ioduro potassico, il solo sale di cui si conosca anche la conducibilità elettrica in iodio fuso. In base alle già citate esperienze di Lewis e Wecher, si calcola che, alla concentrazione in cui KJ raggiunge il valore massimo del peso molecolare (intorno all' 1 %), la sua conducibilità specifica sia paragonabile a quella delle migliori soluzioni acquose saline normaldecime. Ciò autorizza a ritenere che l'ioduro potassico, sciolto in iodio fuso, sia contemporaneamente dissociato e polimerizzato:



Il fenomeno non è nuovo; si può anzi affermare che l'esistenza di molecole polimere degli elettroliti rappresenti il caso generale delle soluzioni conduttrici non acquose, e porga una plausibile spiegazione del fatto che per esse non si riscontra generalmente nessuna identità fra il valore del grado di dissociazione calcolato coi metodi osmotici e quello dedotto dalla conducibilità elettrolitica (Walden).

Il presentarsi di un massimo nella serie dei pesi molecolari, oltre il quale la complessità del soluto apparentemente decresce coll'aumentare della concentrazione, si spiega poi considerando la verosimile formazione di polioduri nel fuso ⁽¹⁾:



Infatti, ammessa in seno al liquido un'associazione molecolare del solvente al soluto (solvatazione), la quale non alteri il numero delle particelle osmoticamente attive, è facile dimostrare che i pesi molecolari appariranno minori dei reali e tenderanno continuamente a diminuire col crescere della concentrazione. Tale andamento, di entità trascurabile in soluzioni diluite, diviene in modo speciale manifesto nelle soluzioni concentrate.

I. KJ; II. RbJ; III. NH₄J; IV. C₆H₅NH₂.HJ; V. (CH₃)₄NJ; VI (CH₃)₃C₆H₅NJ; VII. (CH₃)₃C₆H₄CH₃NJ.

TAV. V.

conc. %	Δ	PM	conc. %	Δ	PM
I. KJ = 166			IV. C ₆ H ₅ NH ₂ .HJ = 221		
0.1092	0.128	181.6	0.1204	0.108	237.5
0.2351	0.26	181.6	0.3501	0.288	259
0.3760	0.385	192.6	0.8879	0.665	284
1.321	1.18	208.0	1.686	1.215	286.8
			2.844	2.32	261.1
2.302	2.370	224.9	4.756	4.73	214.1
2.760	2.70	217.7	V. (CH ₃) ₄ N.J = 201		
2.918	5.95	210.7	0.1116	0.11	216.1
			0.2792	0.245	242.7
3.725	4.11	193.1	0.7122	0.58	261.5
4.541	5.50	177.4	1.140	0.93	261.2
4.812	5.78	177.0	1.837	1.606	244.6
2.3 % KJ + HgJ ₂			3.087	3.25	202.3
0.5197 (HgI ₂)	0.15	737.9	3.789	4.57	177
1.157	0.33	746.6			
3.509	1.00	747.4			

⁽¹⁾ Abegg e Hamburger, Z. für anorg. Chem., Bd. 50, pag. 403; Olivari, Rend. Acc. Lincei, vol. XVII, 2° sem., pag. 717 (1908).

Segue: Tav. V.

conc. %	Δ	PM	conc. %	Δ	PM
VI. $(\text{CH}_3)_3\text{C}_6\text{H}_5\text{NJ} = 263$					
0.1786	0.17	223	0.0948	0.075	268
0.5859	0.48	260	0.2665	0.185	305.7
1.232	0.93	282.2	0.5444	0.85	331.3
2.393	1.85	275.6	1.068	0.67	121.5
3.702	3.18	248	1.816	1.215	318.4
4.582	4.30	227	2.711	2.10	283
			3.830	3.385	241.1
			4.903	4.93	209.5
			6.537	8.18	170
			7.793	11.28	147.1
VII. $(\text{CH}_3)_3\text{C}_6\text{H}_4(\text{CH}_3)\text{N.J} = 277$					
0.6832	0.725	200.7	0.1784	0.124	306.5
1.711	1.81	201.3	0.3656	0.235	331.4
2.141	2.32	196.6	0.9749	0.59	352
2.975	3.48	182.1	1.774	1.11	340.5
			3.265	2.50	278.2
0.3199	0.38	179			
0.5413	0.60	192.2			
0.9328	0.97	204.9			
1.486	1.56	203			
2.308	2.57	191.3			
3.249	4.06	170.4			

Ma nel nostro caso la sostanza sciolta è un elettrolita e, di più, è anche in parte polimerizzata; ora, il crescere della concentrazione, favorendo il costituirsi delle molecole neutre e polimere del soluto, produrrà per tale riguardo un aumento dei pesi molecolari antagonistico alla diminuzione cagionata dalla solvatazione. Inoltre l'aumento sarà in particolar modo evidente nelle soluzioni diluite, poichè è noto che le curve di dissociazione tendono a divenire orizzontali.

Componendo le due influenze, potrà darsi che, per opportuni valori delle costanti relative agli equilibri I e II, prevalga in soluzioni diluite l'aumento dei pesi molecolari colla concentrazione, dovuto al retrocedere della dissociazione ionica e molecolare del soluto; e in soluzioni concentrate prevalga invece la diminuzione indotta dalla combinazione col solvente. E così la curva dei pesi molecolari presenterà un massimo ⁽¹⁾.

Non insisteremo ulteriormente su queste considerazioni di carattere orientativo: ci basti concludere che lo stato dello ioduro potassico (e, verosimilmente, anche quello degli altri ioduri) in soluzione nell'iodio fuso è caratterizzato sia da dissociazione e polimerizzazione contemporanee, sia dalla formazione di complessi col solvente (poliioduri).

Beckmann, sperimentando sugli ioduri di potassio, di sodio, di litio, di rubidio e di cesio, si limita a constatare l'esistenza di molecole associate anche al punto di ebollizione dello iodio (184°); naturalmente, ciò esclude che l'anomalia osservata possa attribuirsi a fenomeni di isomorfismo,

⁽¹⁾ Cfr. Jones, « Hydrates in aqueous solution », Carnegie Institution (1907); Walden, Z. für anorg. Chem., 30, pag. 145 (1902), e Z. für physik. Chem., 55, pag. 321 (1906).

Chimica-fisica. — *La tensione superficiale e l'idratazione in soluzione*. Nota di M. PADOA e G. TABELLINI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *I sistemi binari cianamide-acqua, cianamide-urea e cianamide-diciandiamide* ⁽¹⁾. Nota di M. PRATOLONGO, presentata dal Socio A. MENOZZI.

In una serie di ricerche, di cui ho dato conto in una Nota precedente ⁽²⁾, ho fatto oggetto di studio il comportamento della cianamide quale solvente crioscopico. Allo scopo di giungere ad una più esatta conoscenza del comportamento reciproco dei composti studiati, mi sono indotto, di fronte alle notevoli anomalie di carattere associativo, che sono emerse dalle ricerche crioscopiche, a completare lo studio dei sistemi binari *cianamide-acqua*, *cianamide-urea* e *cianamide-diciandiamide*. I risultati di tale ricerca sono oggetto della presente Nota.

Per tutti e tre i sistemi studiati, la ricerca venne limitata all'esame delle curve di congelamento. Le determinazioni vennero eseguite seguendo i metodi consueti. Le curve di congelamento del sistema *cianamide-acqua*, nel quale più notevoli si presentano le anomalie crioscopiche di carattere associativo, vennero determinate con termometro Beckmann al centesimo di grado; quelle dei sistemi *cianamide-urea* e *cianamide-diciandiamide*, con termometro al decimo.

Nello studio dei sistemi *cianamide-urea* e *cianamide-diciandiamide* la ricerca ha naturalmente dovuto esser limitata al campo di stabilità della cianamide, il cui limite superiore può porsi, nelle condizioni sperimentali delle ricerche presenti, fra 90° e 100° ⁽³⁾. Nei diagrammi che seguono, le linee tratteggiate indicano l'andamento probabile delle curve di congelamento a temperature superiori a quelle che segnano il limite di stabilità della cianamide.

Per quanto ha riguardo alla preparazione e alla purezza dei prodotti adoperati, mi richiamo alla mia Nota precedentemente citata.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica agraria della R. Scuola superiore di agricoltura, di Milano.

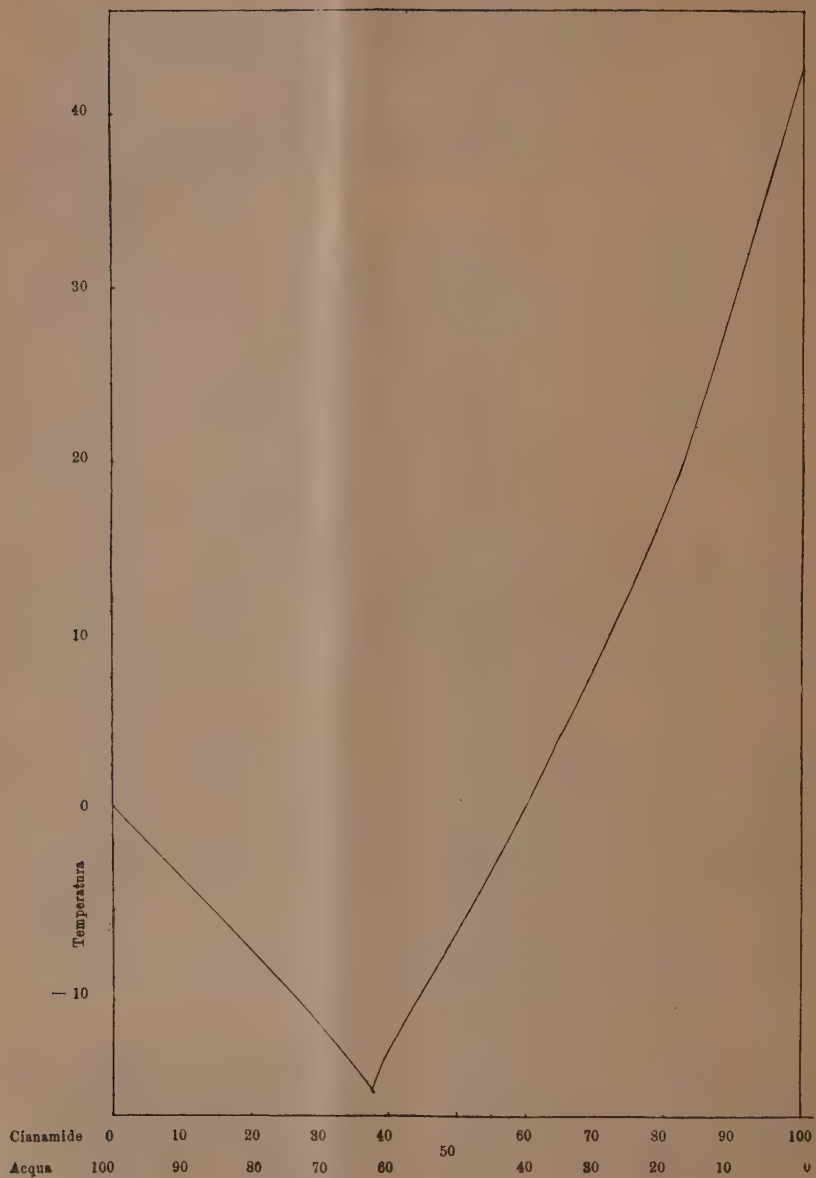
⁽²⁾ Questi Rendiconti.

⁽³⁾ Giova notare, (ciò che sarà oggetto di una Nota successiva) che la trasformazione della cianamide solida procede lentissima a temperatura ordinaria; e anche alla temperatura di fusione, è solo sensibile dopo alcuni giorni. Nel limite di alcuni minuti, la velocità di trasformazione è ancora trascurabile a 80°.

I risultati delle ricerche compiute sono raccolti nei prospetti che seguono :

I. Sistema *Cianamide-Acqua*.

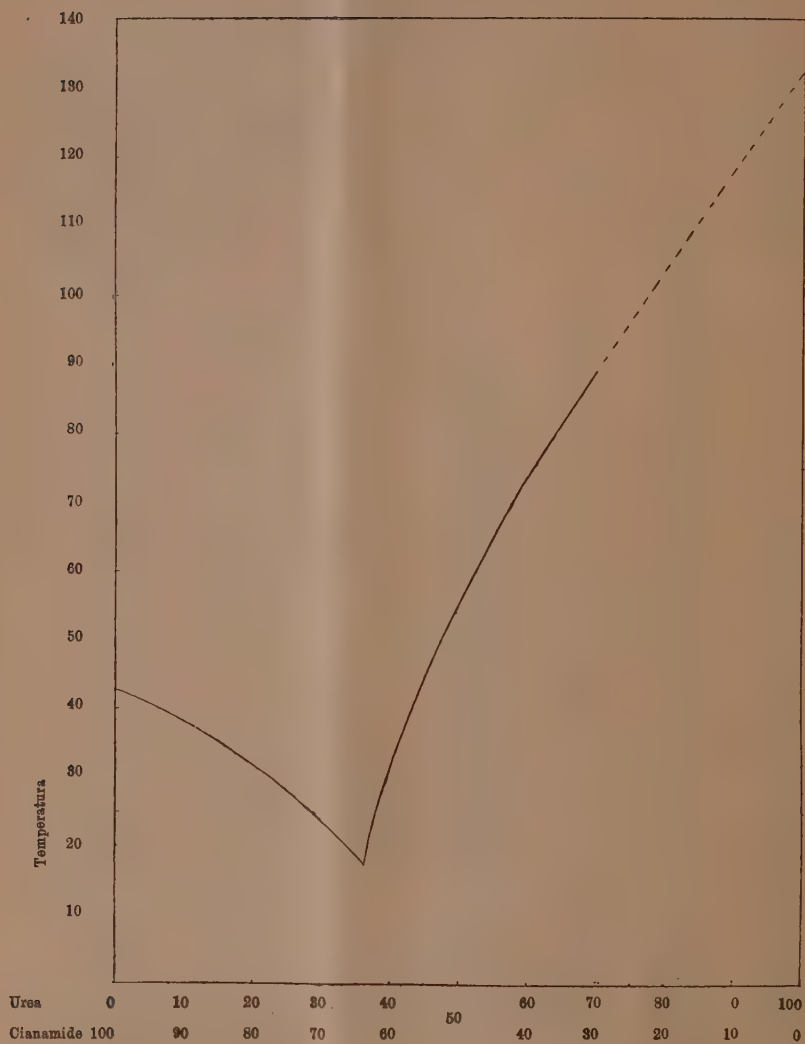
N. d'ordine	Acqua %	Cianamide %	Temperatura di congelamento	Fase solida
1	100.00	—	0.00	Ghiaccio
2	98.62	1.38	— 0.62	"
3	97.42	2.58	— 1.13	"
4	96.62	3.38	— 1.48	"
5	93.69	6.31	— 2.60	"
6	90.58	9.42	— 3.96	"
7	85.02	14.98	— 6.19	"
8	81.60	18.40	— 7.58	"
9	75.30	24.70	— 10.19	"
10	73.91	26.09	— 10.74	"
11	71.38	28.62	— 11.88	"
12	69.10	30.90	— 12.72	"
13	66.68	33.32	— 13.93	"
14	63.14	36.86	— 15.39	"
15	61.25	38.75	— 15.59	Cianamide
16	59.81	40.19	— 14.39	"
17	58.33	41.67	— 13.23	"
18	56.73	43.27	— 11.80	"
19	55.01	44.99	— 10.76	"
20	52.40	47.60	— 8.92	"
21	47.88	52.12	— 5.81	"
22	43.20	56.80	— 2.49	"
23	39.65	60.35	+ 0.28	"
24	33.63	66.37	5.12	"
25	30.30	69.70	7.85	"
26	23.80	77.20	14.50	"
27	18.19	81.71	19.32	"
28	12.85	87.15	25.60	"
29	10.59	89.41	28.58	"
30	8.16	91.84	32.00	"
31	4.69	95.31	35.78	"
32	3.23	96.77	37.90	"
33	2.68	97.32	38.60	"
34	1.76	98.24	40.12	"
35	—	100.00	42.90	"



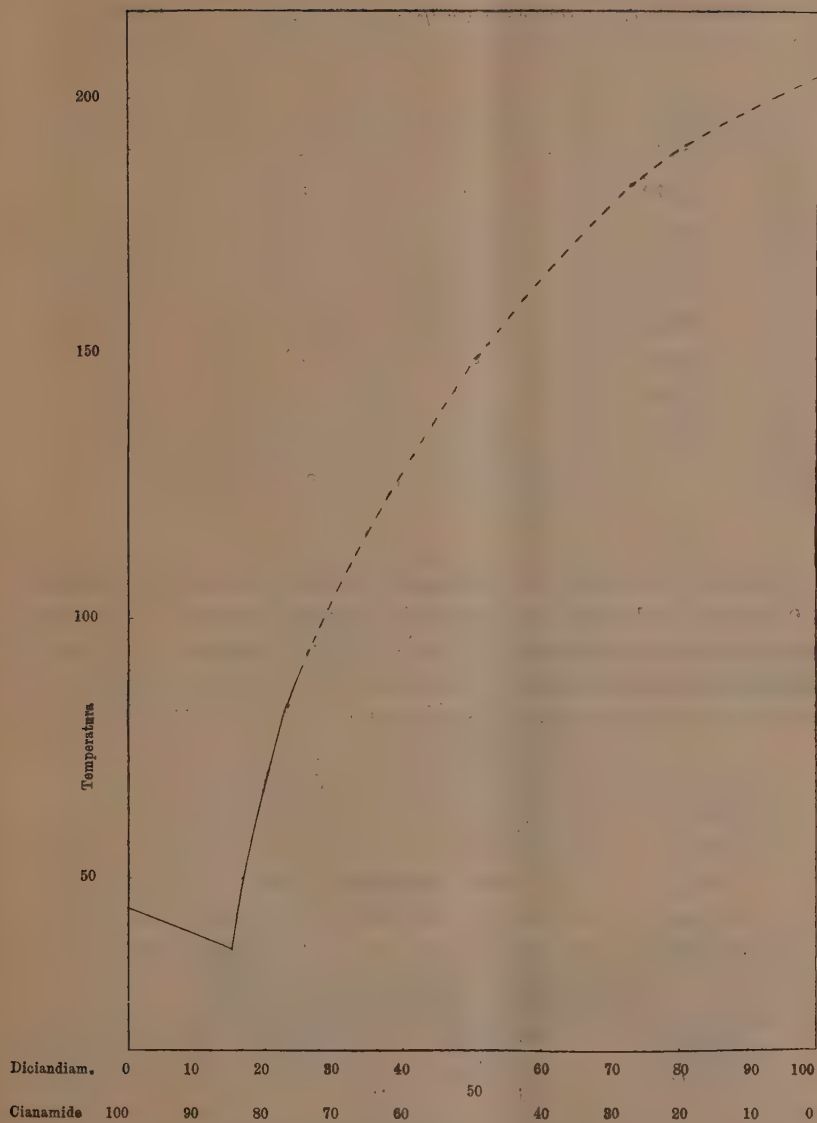
Diagr. I. Sistema *Cianamide-Acqua*.

II. Sistema *Cinamide-Urea*.

N. d'ordine	Cianamide %	Urea %	Temperatura di congelamento	Fase solida
1	100.00	—	42.9	Cianamide
2	95.84	4.16	41.3	"
3	92.01	7.99	39.4	"
4	88.48	11.52	37.6	"
5	85.20	14.80	35.8	"
6	82.21	17.79	33.9	"
7	79.40	20.60	32.0	"
8	77.22	22.78	30.3	"
9	74.20	25.80	27.8	"
10	69.61	30.29	23.8	"
11	65.80	34.20	19.6	"
12	62.55	37.45	22.4	Urea
13	61.13	38.87	28.6	"
14	59.00	41.00	35.0	"
15	53.50	46.50	47.0	"
16	49.02	50.98	56.3	"
17	45.13	54.87	63.5	"
18	41.90	58.10	68.7	"
19	39.06	60.94	74.8	"
20	32.79	67.21	84.8	"
21	30.70	69.30	88.4	"
22	—	100.00	182.00	"



Diagr. II. Sistema *Cianamide-Urea*.



Diagr. III. Sistema *Cianamide-Diciandiamide*.

III. Sistema *Cianamide-Diciandiamide*.

N. d'ord.	Cianamide %	Diciandiamide %	Temperatura di congelamento	Fase solida
1	100.00	—	42.9	Cianamide
2	95.24	4.70	40.9	"
3	90.91	9.09	38.9	"
4	86.96	13.04	36.8	"
5	84.59	15.41	40.9	Diciandiamide
6	83.40	16.60	49.6	"
7	81.80	18.18	58.6	"
8	80.00	20.00	66.5	"
9	77.02	22.98	80.0	"
10	—	100.00	205.0	"

L'esame delle curve di congelamento, che sono tracciate nei diagrammi 1, 2 e 3, come del resto i risultati di alcune analisi termiche che ho istituite su alcune miscele appartenenti ai diversi sistemi, pongono in rilievo, per ciascuno dei sistemi descritti, l'esistenza di un semplice eutettico, la cui composizione e temperatura di congelamento appare nel seguente prospetto:

I. Sistema *Cianamide-Acqua*.

<i>Cianamide</i>	<i>Acqua</i>	Temperatura di congelamento
37.8 %	62.2 %	— 16°.6

II. Sistema *Cianamide-Urea*.

<i>Cianamide</i>	<i>Urea</i>	Temperatura di congelamento
63.9 %	36.1 %	17°.4

III. Sistema *Cianamide-Diciandiamide*.

<i>Cianamide</i>	<i>Diciandiamide</i>	Temperatura di congelamento
85.0 %	15.0 %	85°.6

Fisiologia. — *La perspirazione cutanea in alta montagna* ⁽¹⁾.

Nota del dott. GAETANO VIALE, presentata dal Socio PIO FOÀ.

Fondandosi su la legge fisica dell'aumento dell'evaporazione, quando la pressione barometrica diminuisce, alcuni autori affermarono, senz'altro, che in alta montagna la perspirazione cutanea dev'essere maggiore; e questa opinione trovò un appoggio negli esperimenti di Regnard (*Cure d'altitude*, 1897) il quale, mantenendo animali a lungo sotto alla campana pneumatica, constatò una maggior perdita di acqua nell'aria rarefatta.

Se non che Mosso (*L'uomo sulle Alpi*, III ed., Milano, 1909, pag. 393); Zuntz, Loewi, Müller, Caspari (*Höhenklima und Bergwanderungen*, Berlin, 1906, pag. 378); Guillemard e Moog, [Compt. rend. Soc. Biol. 1907, pp. 819 e 874; Compt. rend. Acad. d. Sciences, Paris, 148, pag. 1624 (1909)], ed altri, trovarono invece una minor perdita d'acqua nell'aria rarefatta. Il metodo da loro generalmente usato è stato quello della variazione in peso dell'organismo, col quale misurarono complessivamente l'acqua eliminata per la cute e quella per i polmoni. Guillemard e Moog, [Compt. rend. Acad. d. Sciences, Paris, 145, 823, an. 1907], cercarono di ricavare separatamente le due quantità; e trovarono che, mentre in montagna cresce l'acqua emessa per i polmoni, diminuisce molto l'acqua emessa per la cute. Siccome tutti questi autori non sperimentarono nelle stesse condizioni di temperatura al piano e in montagna, così essi non poterono attribuire la minor perdita d'acqua in montagna alla altitudine, ma tutt'al più alla bassa temperatura che induce vasocostrizione cutanea e toglie ogni attività alle ghiandole sudoripare.

Kalmann, [Pflüger's Arch., 112, 561 (1906)], da ricerche dirette, concluse che l'altitudine fa diminuire l'evaporazione cutanea, e suppose che per la regolazione dell'equilibrio termico in media montagna fosse necessaria una minore attività perspiratoria della cute.

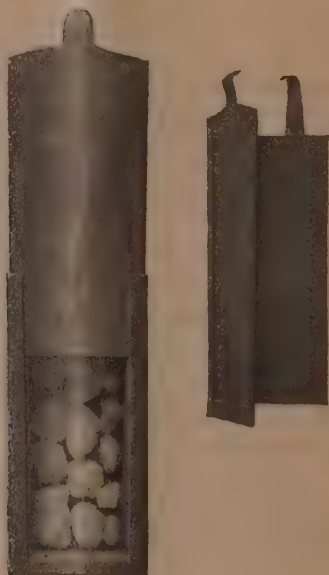
O. Cohnheim e i suoi collaboratori [Zeit. f. physiol. Chemie, 63, 413 (1909) e 78, 62 (1912)], contrariamente agli altri, trovano in pianura una minor eliminazione di acqua. Poichè determinarono la perdita in peso che avveniva durante la notte sotto le coltri, essi sperimentarono quasi nelle stesse temperature in montagna e in pianura ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Ricerche eseguite per consiglio e sotto la direzione del prof. Gino Galeotti, nel Laboratorio scientifico « A. Mosso » sul Monte Rosa (dirett. prof. A. Aggazzotti).

⁽²⁾ Un errore di questi esperimenti è stato quello di aver considerato la perdita in peso dell'organismo come perdita di acqua, trascurando l'emissione dell'anidride carbonica che pur è rilevante, tanto più che l'emissione di questo gas è maggiore in alta montagna che non al piano.

Ultimamente, Galeotti e Signorelli [Bioch. Zeitschr., 41, 268 (1912)] stabilirono un bilancio completo dell'acqua determinando l'acqua introdotta, quella eliminata con le feci e con l'urina, con l'aria espirata, e con la cute. Essi conclusero che si perde minor acqua per la cute nel soggiorno in alta montagna; e giustamente riportarono ciò alla differenza della temperatura e non già alla rarefazione dell'aria. Dai loro valori, se pure in via generale si poteva dire che in montagna si perdeva meno acqua, non si poteva però senz'altro dire, che nell'unità di tempo, da una determinata superficie cutanea si perspirasse meno.

E così mi è sembrato opportuno di trattare sperimentalmente, in modo diretto, il problema.



METODO. — Per le mie determinazioni servì un apparecchio semplice ed esatto, ideato dal prof. Galeotti (ved. figura). Consta di una cassetta metallica rettangolare, che si apre e chiude come uno *chassis* fotografico con un coperchio metallico scorrevole con attrito in una doccia. Nel fondo della cassetta sono attaccati, a guisa di mosaico, dei blocchetti di cloruro di calcio. Per fissarli, si adagiano in paraffina resa semifluida col calore: raffreddandosi e consolidandosi la paraffina, i blocchetti restano aderenti. Dopo aver ripetutamente scossa la scatola per far cadere ogni traccia di polvere dal cloruro di calcio, la cassetta chiusa viene pesata. Tolto poi il coperchio, la scatola prontamente si applica su la cute, si stringe con una cinghia, si lascia un tempo determinato: trascorso il quale, prontamente si chiude e si ripesa.

L'aumento in peso esprime la quantità di vapor acqueo esalato dalla superficie cutanea esplorata. Poichè è nota l'estensione di essa così si può calcolare la quantità di acqua perspirata nell'unità di tempo dall'unità di superficie. Si tien conto dell'umidità dell'aria ⁽¹⁾ e della temperatura ambiente.

L'apparecchio può applicarsi in qualsiasi parte del corpo, purchè la pelle lo chiuda perfettamente: ma per il confronto tra la perspirazione in montagna e quella in pianura, preferii utilizzar sempre la superficie anteriore dell'avambraccio.

La prima serie di determinazioni è stata fatta al colle d'Olen (m. 2900 s. m.), e la seconda serie a Torino (m. 250 s. m.). Le cifre, nei ragguagli delle tabelle, si riferiscono all'acqua perspirata da 1 dm² di cute in 10', e sono espresse in milligrammi.

Determinazioni al colle d'Olen.

Data 1913	Temperatura	Grado igrometrico	H ₂ O da 1 dm ² in 10'	
			mg.	
22 - VII	8°	—	23.6	Esperimenti su G. V.
25 "	10	70	28.1	
26 "	9	80	23.7	
27 "	10,5'	80	27	
	10,5	80	22.7	
28 "	9	87	24.8	
29 "	13	95	18.9	
	9,5	87	20.2	
31 "	9	75	27	
1 - VIII	8	80	18.9	
	11	80	20.2	
2 "	10	90	24.3	
4 "	11	80	23	Su A. A.
	9,5	80	19.4	
	14	80	28.3	
5 "	9	70	25.1	
31 - VII	10	75	24.3	
1 - VIII	11	80	21.1	
5 "	10	70	22.8	

(1) Applicata la cassetta, la zona di cute in esperimento perspira in un'aria resa secca dalla presenza di cloruro di calcio. Per cui nelle mie misure l'igrometria non ha una grande importanza: ma noi non sappiamo quale ripercussione possa avere lo stato di tutto l'organismo su la zona limitata di cute che si esplora.

Da questa tabella si rileva:

1) Al colle d'Olen, alla temperatura media di 10° (grado igrometrico 75-80) da 1 dm² di cute, in 10', si perspirano mgr. 23 di acqua in media. Calcolando la superficie del corpo come m² 1.6, secondo Vierordt, in 24^b, da tutto il corpo un uomo di statura media perspira gr. 536 di acqua (¹). Galeotti (loc. cit.), calcolando la perdita d'acqua dalla cute, durante il decorso d'una giornata, trovò all'Olen, alla temperatura media di 11°, gr. 473-671, valori concordanti pienamente col mio.

2) Nel breve ambito delle temperature sperimentate, tra 8° e 14°, si riscontrò un rapporto approssimativo tra temperatura e quantità d'acqua perspirata.

3) Comparando poi i valori dell'acqua col grado igrometrico, oscillando la temperatura tra 9° e 10°, si constatò, col crescere dell'umidità dell'aria, una diminuzione nel vapor acqueo esalato.

Per cui la maggior temperatura agirebbe in modo contrario alla maggior umidità. In ciò i miei valori concordano con quelli di Rubner [*Arch. f. Hygiene*, 11, 137 (1890)], di Wolpert [*Arch. f. Hygiene*, 41, 30 (1901)], e di altri.

Determinazioni a Torino.

Data 1913	Temperatura	Grado igrometrico	H ₂ O da 1 dm ² in 10'	
			mg.	
7 - XI	10°	75	14.5	} Su G. V.
8 "	10	78	14.3	
9 "	13	69	14.8	
	10	88	12.8	
10 "	14,8	82	16.6	
12 "	14	76	17.2	
13 "	17	70	17.3	
	9	77	12.9	
14 "	16	72	13.4	
15 "	16	80	16	
12 "	16	76	13	} Su A. A.
14 "	17	72	12	

(¹) Questa cifra va accolta con riserva, giacchè non si può senz'altro ammettere che tutte le parti del corpo, anche senza secrezione di sudore, eliminino, per perspirazione, eguali quantità di acqua.

Dai valori ottenuti a Torino, ricaviamo le stesse conclusioni circa al rapporto tra perspirazione del vapor acqueo e temperatura e grado igrometrico.

Da 1 dm² di cute, in 10', a Torino, alla temperatura media di 10° (grado igrometrico tra 75 e 80), si esalano in media mg. 14 di acqua; cioè nelle 24^h. calcolando la superficie di tutto il corpo m.² 1,6, gr. 322 di acqua.

Riesce utile il paragone dei miei valori con quelli già noti: Röhrig [*Physiologie der Haut*, 1876] trovò, in condizioni medie di temperatura, per tutto il giorno, gr. 660; Schierbeck [*Arch. f. Hygiene*, 16, 203, 1893] a 18°, gr. 317, e [*Arch. f. (Anat. u.) Physiol.*, 1893, pag. 116] a 29°,8, gr. 532; Nutall [*Arch. f. Hygiene*, 23, 184, 1895] a 28°,8 gr. 304; Wolpert [*loc. cit.*] un valore simile a quello di Röhrig; Willebrand [*Skandin. Arch.*, 13, 337, 1902] a 12° trovò gr. 252, a 16° gr. 366, a 17°,2 gr. 396; Osborne [*Journ. of Physiol.*, 41, 345, 1910] trovò a 17°,3, gr. 748; Kalmann [*loc. cit.*] a 15°-16° gr. 821 in media; Galeotti e Signorelli [*loc. cit.*] trovarono a Napoli, alla temperatura media di 18°-20°, per G., gr. 946-1690, per S. gr. 719-1079.

Le cifre riferite superano, in generale, il valore da me trovato: ciò dipende dalla maggior temperatura a cui si sperimentò: invece, nell'ambito delle temperature a cui sperimentai io, si trovano valori più concordanti col mio e col valore di Schierbeck a 18°. Dalle mie determinazioni a 17° si calcola un'emissione di gr. 398: cifra che pienamente concorda con quella ottenuta da Willebrand a 17°,8 (cioè gr. 396).

I miei valori sono poi molto uniformi, perchè col metodo del prof. Galeotti misurai solo la fase gassosa (insensibile) della traspirazione cutanea; mentre invece gli sbalzi grandi tra giorno e giorno, quali si vedono nelle cifre di Galeotti e Signorelli, sono da riportarsi all'attività saltuaria della funzione sudoripara.

Più interessante appare il confronto dei valori ottenuti al colle d'Olen con quelli ottenuti a Torino. Resulta che in alta montagna l'eliminazione cutanea dell'acqua è maggiore che non in pianura.

Per render conto della divergenza di questo resultamento da quello di altri autori citati in principio, giova pensare:

1) che Mosso, Zuntz, Galeotti e Signorelli non sperimentarono alle stesse temperature, e che la differenza da loro riscontrata nell'eliminazione dell'acqua si deve riportare non all'altitudine, ma alla temperatura. Io infatti — e in parte pur Cohnheim — sperimentando alla stessa temperatura tanto su le Alpi quanto al piano, ho riscontrato una maggior perdita d'acqua nell'aria rarefatta. Anche recentemente Aggazzotti [*Arch. f. Entwickelmech*, 36, 633, 1913] trovò che la perdita d'acqua delle uova di gallina in via di sviluppo è maggiore in montagna che non in pianura: per necessità sperimen-

tali le uova si trovavano alla stessa temperatura ambiente dell'incubatrice nei due luoghi;

2) che io ho sempre sperimentato a temperature piuttosto basse, intorno a 10°, quando cioè si poteva supporre che le ghiandole sudoripare fossero inattive, per cui determinai la sola fase gassosa (insensibile) della eliminazione dell'acqua. È appunto noto che la temperatura critica per il funzionamento delle ghiandole del sudore è 33° (cfr. Schierbeck, loc. cit.). In ricerche che durano un'intera giornata, vi sono, nelle condizioni climatiche della pianura, più occasioni a sudare: per cui la perdita dell'acqua diventa grande e anche maggiore che non nell'aria rarefatta, ma per un altro meccanismo che non è quello della perspirazione insensibile;

3) che è difficile di avere le stesse condizioni igrometriche alla montagna e al piano, in esperienze che occupano un giorno intero: invece nelle mie determinazioni, che durano pochi minuti, è in certo qual modo possibile la riproduzione, al piano, del clima alpino;

4) che, pur ammettendo che la perdita complessiva dell'acqua sia minore nell'aria rarefatta, potrebbe darsi che, anche eliminandone in maggior copia dalla cute, se ne eliminasse molto meno per i polmoni. Ulteriori studi delucideranno questo punto. Galeotti [Bioch. Zeitschr., 46, 173, 1912] trovò intanto come — essendo la temperatura più bassa — diminuisca l'eliminazione del vapor d'acqua dai polmoni. Le ricerche dirette eseguite da Galeotti e Signorelli (loc. cit.) in montagna, non hanno dato ancora risultati conclusivi.

La maggior perspirazione cutanea dell'acqua in alta montagna si può interpretare con due diversi meccanismi.

Se si ammettesse con Schwenkenbecher [Med. klin. Jahrg., 4, 889, 1908] e con Luciani [Fisiologia dell'uomo II, pag. 543], che la perspirazione fosse un fenomeno biologico dovuto all'attività delle ghiandole sudoripare, allora si potrebbe ammettere che in alta montagna, come altre funzioni, anche quella delle ghiandole sudoripare venisse esaltata. Sennonchè, questo esaltamento non venne riscontrato in misure dirette da Viale [Rend. Accad. dei Lincei, 22, 180, 1913].

Se invece si ammette che *perspiratio insensibilis* e *sensibilis* non sieno due gradi di uno stesso processo, ma due distinti fenomeni con un proprio determinismo, e se si ammette che la *perspiratio insensibilis* avvenga per pura legge fisica di evaporazione attraverso la pelle che è sicuramente permeabile all'acqua, allora il fatto da me riscontrato ha una facile e semplice interpretazione: cioè dipende dalla diminuita pressione atmosferica.

Poichè in alta montagna la *perspiratio insensibilis* è aumentata, mentre invece la funzionalità delle ghiandole sudoripare si trova inibita dal freddo, si è in certo modo propensi a considerare la *perspiratio sensibilis* e la *insensibilis* come due ordini di fenomeni indipendenti.

Ci portiamo così nell'ambito delle idee di Willebrand [loc. cit.] e di Loewy e Wechselmann [Virchow's Arch., 206, 79, 1911].

Il fattore principale che determina la maggior perspirazione in alta montagna è dunque la rarefazione dell'aria, che, oltre che per un meccanismo fisico, agisce anche per un meccanismo biologico determinando vasodilatazione periferica nell'organismo. Tra le cause che possono modificare infatti l'eliminazione cutanea dell'acqua, sta pure l'irrorazione sanguigna: cfr. Jansen [Deutsch. Arch. f. klin. Mediz., 23, 314, 1883].

Una certa influenza può anche avere l'acclimatazione al freddo; per cui, a parità di temperatura, l'impressione di freddo e la vasocostrizione è maggiore al piano che non in montagna: questo fattore diminuisce i valori della perspirazione cutanea.

Le conclusioni di questi miei esperimenti si posson così riassumere:

1°) La *perspiratio insensibilis* di 1 dm² di cute (avambraccio), calcolata in milligrammi di acqua in 10', e alla temperatura media di 10°, è a Torino, mgr. 14; al colle d'Olen, mgr. 23.

2°) Ponendo per ora l'ipotesi che la perspirazione sia presso a poco eguale per la cute delle diverse parti del corpo, la perdita totale di acqua per la via della pelle (senza sudorazione), alla temperatura di 10° sarebbe: a Torino, gr. 322; al Colle d'Olen, gr. 536.

Questi valori concordano con quelli di altri autori che esperimentarono in eguali condizioni e alla stessa temperatura.

3°) Il fatto principale che determina la maggior perspirazione cutanea in alta montagna deve essere la rarefazione dell'aria, che agisce per un meccanismo fisico, poichè la cute è certamente permeabile all'acqua; e per un meccanismo biologico, producendo vasodilatazione periferica nell'organismo.

4°) La quantità d'acqua eliminata dalla cute colla *perspiratio insensibilis* cresce con la temperatura dell'ambiente, e diminuisce con l'aumentare del grado igrometrico dell'aria.

Zoologia. — *Le divisioni dei nuclei in Haplosporidium limnodrili*. Nota di LEOPOLDO GRANATA, presentata dal Socio B. GRASSI.

Zoologia. — *L'apparato reticolare interno di Golgi nelle cellule nervose dei crostacei*. Nota del prof. RINA MONTI, presentata dal Socio B. GRASSI.

Queste Note saranno pubblicate in un prossimo fascicolo.

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

LINCIO G., *Rocce e minerali del Monte Colmine ed adiacenze*. Presentata dal Socio VIOLA.

COTRONEI M., *Sul tubo digerente del Linculus*. Pres. dal Socio GRASSI.

BARGAGLI PETRUCCI G., *Sull'origine biologica della Terra di Siena (Terre gialle e bolari del Monte Amiata)*. Pres. dal Corrispondente BACCARINI.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio STRÜVER, relatore, a nome anche del Corrisp. MILLOSEVICH F., legge una relazione sulla Memoria del dott. E. GRILL, avente per titolo: *I minerali dell'isola di Nisiro (Mar Egeo)*, concludendo col proporre la inserzione del lavoro nei volumi accademici.

Eguale proposta fa il Corrisp. MILLOSEVICH F., relatore, a nome anche del Socio STRÜVER, per la Memoria del dott. A. ROSATI, intitolata: *Studio cristallografico della Maucherite e della Placodina*.

Le conclusioni delle Commissioni esaminatrici sopra nominate, messe ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio DE STEFANI legge una Commemorazione del Corrispondente prof. IGINO COCCHI.

Questa Commemorazione sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Il PRESIDENTE comunica i ringraziamenti inviati dal prof. I. FREDHOLM all'Accademia, per la sua recente nomina a Socio straniero.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle del Socio TARAMELLI, dei Corrispondenti PASCAL e SILVESTRI, e dei Soci stranieri LACROIX e PICARD; fa inoltre particolare men-

zione dei seguenti lavori del prof. ANGELITTI: *Le antiche misure della lunghezza del meridiano terrestre*; *La forma della terra secondo Aristotele nel trattato De Caelo*.

Il Socio PIROTTA fa omaggio a nome dell'autore prof. LONGO dell'Orto botanico di Siena, di varie pubblicazioni, e si intrattiene sulla importanza di alcune di queste.

CONCORSI A PREMI

Il PRESIDENTE comunica gli elenchi dei lavori presentati per concorrere al premio Reale, del 1913, per la Matematica, dai signori: LAURICELLA G., MIDOLO P., SEVERI F.; e per il premio Reale di Fisiologia normale e patologica, parimente del 1913, dai signori: BARBIERI N. A., BOCCI B., BOTTAZZI F., FICHERA G., LOMONACO D., NEGRO C., PETRONE A., SEGALE M., ZANOTTI P.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente BLASERNA annuncia che alla seduta assiste il prof. DE BODOLA della Scuola politecnica di Budapest.

Lo stesso PRESIDENTE dà partecipazione degli inviti per le feste commemorative che saranno celebrate dalla Reale Accademia di scienze ed arti di Barcellona e dalla Biblioteca imperiale di Pietroburgo, nonchè di un invito per tenere a S. Francisco un meeting nell'occasione dell'Esposizione internazionale del Panama (1915).

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 4 gennaio 1914.

- ANGELITTI F. — La forma della terra secondo Aristotele nel trattato « De Caelo ». (Estr. dalla « Rivista di Astronomia e scienze affini », an. VII). Torino, 1913. 8°.
- ANGELITTI F. — Le antiche misure della lunghezza del meridiano terrestre. (Estr. dalla « Rivista di Astronomia e scienze affini », an. VII). Torino, 1913. 8°.
- LACROIX A. — Minéralogie de la France et de ses Colonies. Description physique et chimique des minéraux: étude des conditions géologiques de leurs gisements. T. V. suppl. II et Index géographique dressé avec le concours du Colon. Azéma. Paris, 1913. 8°.
- PASCAL E. — I miei integrafì per equazioni differenziali. Napoli, 1913. 8°.
- PICARD ÉM. — L'oeuvre d'Henri Poincaré. (Extr. de la « Revue scientifique », 1913). Paris, 1913. 8°.
- RELAZIONE II della Commissione per le norme edilizie obbligatorie per i Comuni colpiti dal terremoto del 28 dicembre 1908 e da altri anteriori. Istruzioni tecniche-metodi di calcolo-applicazioni. Roma, 1913. 8°.
- SALAZAR A. E. — Las funciones iperbólicas i su aplikazion a los problemas de injeneria eléctrica. Killota, 1913. 8°.
- SILVESTRI F. — Descrizione di un nuovo ordine di insetti. (Estr. dal « Boll. del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di agricoltura », vol. VII). Portici, 1913. 8°.
- TARAMELLI T. — Ricordo dello Spallanzani, come vulcanologo. (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere », vol. XLVI). Pavia, 1913. 8°.
- TARANELLI T. — Sul lembo pliocenico di S. Bartolomeo presso Salò. (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere », vol. XLVI). Pavia, 1913. 8°.
- TEODORO G. — Sul sistema tracheale dei Lecaniti. (Estr. dal « Redia », vol. IX). Firenze, 1913. 8°.
- VILHENA H. — Archivo de anatomia et de anthropologia. N. 1. Lisboa, 1913. 8°.
-